



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**Μηχανές διανυσμάτων στήριξης με χρήση πυρήνα
ασαφών βασικών συναρτήσεων**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Ευάγγελου Χ. Σπύρου

Επιβλέπων : Στέφανος Κόλλιας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2003



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**Μηχανές διανυσμάτων στήριξης με χρήση πυρήνα
ασαφών βασικών συναρτήσεων**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Ευάγγελου Χ. Σπύρου

Επιβλέπων : Στέφανος Κόλλιας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 28^η Νοεμβρίου 2003.

.....
Στέφανος Κόλλιας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ανδρέας-Γεώργιος Σταφυλοπάτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Παναγιώτης Τσανάκας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2003

.....
Ευάγγελος Χ. Σπύρου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ευάγγελος Σπύρου 2003

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο διαχωρισμός προτύπων με την χρήση νευρωνικών δικτύων και τα ασαφή συστήματα αποτελούν δύο σημαντικά πεδία έρευνας τα τελευταία χρόνια. Η παρούσα εργασία έχει ως σκοπό την δημιουργία ενός δικτύου που θα συνδυάζει την δομή ενός SVM νευρωνικού δικτύου με αυτήν ενός ασαφούς συστήματος με κανόνες. Ο πυρήνας του μη γραμμικού μετασχηματισμού του δικτύου ορίζεται με τη βοήθεια ασαφών συναρτήσεων βάσης. Το τελικό δίκτυο που ονομάζεται Fuzzy SVM δίκτυο χρησιμοποιεί για την εκπαίδευσή του είτε δευτεροβάθμια (quadratic) βελτιστοποίηση, είτε βελτιστοποίηση με την χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Μελετώνται δύο διαφορετικά δίκτυα. Στο ένα το ασαφές σύστημα, από το οποίο θα προκύψει ο πυρήνας, δημιουργείται από συνεπή ασαφή σύνολα και στο άλλο από μη συνεπή. Κάθε διάλυμα του συνόλου εκπαίδευσης του δικτύου δημιουργεί έναν ασαφή κανόνα. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των κανόνων αυτών και άρα η απλούστευση της δομής του δικτύου, χωρίς να υπάρχει σημαντική απώλεια στην απόδοσή του.

ABSTRACT

Both Pattern Classification using Neural Networks and Fuzzy Systems constitute an area of research interest during last few years. The present work deals with the construction of a network that combines the structure of SVM networks with that of a rule-based fuzzy system. The kernel of the non-linear transformation is constituted of fuzzy basis functions. The final network, named as Fuzzy SVM network, is trained either by a quadratic optimization, or a least squares optimization. Two different types of networks are simulated. The first one has its kernel constructed by fuzzy systems with consistent membership functions, while the second uses weak consistency. Every vector of the training set creates a fuzzy rule. The goal is the minimization of the rules, thus the simplification of the network without significant loss of performance.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε το ακαδημαϊκό έτος 2002-2003 στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο και συγκεκριμένα στο εργαστήριο Ψηφιακής Επεξεργασίας Εικόνας, Βίντεο και Πολυμέσων, υπό την επίβλεψη του καθηγητή κ. Στέφανου Κόλλια. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον ερευνητή ΕΠΙΣΕΥ – ΕΜΠ Δρ Γεώργιο Στάμου για την γόνιμη συνεργασία που είχα μαζί του καθόλη την διάρκεια εκπόνησης της εργασίας αυτής και για την ουσιαστική βοήθειά του στο να ξεπεράσω πολλές από τις δυσκολίες που προέκυψαν. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Στέφανο Κόλλια για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και την ευκαιρία που μου έδωσε. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου καθώς και όλους όσους με υποστήριξαν τον τελευταίο χρόνο.

Αθήνα, Νοέμβριος 2003

Ευάγγελος Χ. Σπύρου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	17
1.1 Γενικά – Βασικές Έννοιες.....	17
1.1.1 Τι είναι τα Νευρωνικά Δίκτυα;.....	17
1.1.2 Ασαφής Λογική, Ασαφή Σύνολα και Ασαφή Συστήματα.....	19
1.2 Σκοπός της Εργασίας	20
1.3 Διάρθρωση της Εργασίας.....	21
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ/ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.....	23
2.1 Ασαφή Συστήματα	23
2.2 Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσης (Fuzzy Basis Functions) - Ορισμός.....	25
2.3 Ψευδοτραπεζοειδείς Συναρτήσεις.....	26
2.4 Ιδιότητες των Ασαφών Συνόλων	28
2.4.1 Πληρότητα.....	28
2.4.2 Συνέπεια.....	28
2.4.3 Κανονικό υποσύνολο ενός Κανονικού ασαφούς συνόλου	29
2.4.4 Κατάταξη μεταξύ ασαφών συνόλων.....	29
2.5 Ιδιότητες των Ασαφών Συναρτήσεων Βάσης	30
2.6 Προσεγγιστικές Ιδιότητες των Ασαφών Συστημάτων	35
2.6.1 Βασική Προσεγγιστική Ιδιότητα	35
2.6.2 Ομοιόμορφη Προσεγγιστική Ιδιότητα	35
2.6.3 Uniform Convergent Ιδιότητα	37
2.6.4 Παγκόσμια Προσεγγιστική Ιδιότητα.....	37
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – SVM ΔΙΚΤΥΑ.....	39
3.1 Γενικά.....	39
3.2 Βασικές Έννοιες για τις Μηχανές Αναγνώρισης Προτύπων.....	40
3.2.1 Ένα φράγμα στην ικανότητα Γενίκευσης – Εμπειρικό Ρίσκο	40
3.2.2 VC διάσταση	41
3.3 Βέλτιστα Υπερεπίπεδα για διαχωρισμό γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων	41
3.4 Βελτιστοποίηση για την εύρεση του Βέλτιστου Υπερεπιπέδου στην περίπτωση γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων.....	43

3.5 Βέλτιστα Υπερεπίπεδα για διαχωρισμό μη γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων.....	45
3.6 Βελτιστοποίηση για την εύρεση του Βέλτιστου Υπερεπιπέδου στην περίπτωση μη γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων	47
3.7 Κατασκευή ενός SVM δικτύου για διαχωρισμό προτύπων.....	48
3.8 Το θεώρημα του Mercer.....	50
3.9 Βέλτιστη σχεδίαση ενός SVM δικτύου.....	51
3.10 Συνήθειες Πυρήνες	52
3.11 Η VC διάσταση των SVM δικτύων	53
3.12 Η αρχιτεκτονική ενός SVM δικτύου.....	53
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΤΟ FUZZY SVM ΔΙΚΤΥΟ	55
4.1 Περιγραφή του Προβλήματος.....	55
4.2 Προσδιορισμός του Πυρήνα του Μετασχηματισμού	55
4.2.1 Ομαδοποίηση του χώρου	57
4.2.2 Προσδιορισμός των $\varphi(\mathbf{x})$	60
4.2.3 Προσδιορισμός των Διανυσμάτων Στήριξης	63
4.2.4 Έλεγχος Ικανοποίησης του Κριτηρίου Mercer	65
4.3 Μάθηση – Κατασκευή του Δικτύου	66
4.4 Το XOR πρόβλημα	67
4.5 Εκπαίδευση του Δικτύου με την χρήση της μεθόδου των Ελάχιστων Τετραγώνων	74
4.5.1 Περιγραφή της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων	74
4.5.2 Εκπαίδευση του LS-SVM δικτύου	76
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ FUZZY SVM ΔΙΚΤΥΩΝ	77
5.1 Μελέτη του Fuzzy SVM δικτύου	77
5.2 Μελέτη του Fuzzy SVM δικτύου με μη-συνεπείς Συναρτήσεις Συμμετοχής	79
5.2.1 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.1$	81
5.2.2 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.2$	82
5.2.3 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.3$	83
5.2.4 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.4$	84
5.2.5 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.5$	85

5.2.6 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.6$	86
5.2.7 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.7$	87
5.2.8 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.8$	88
5.2.9 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.9$	89
5.2.10 Μελέτη του Δικτύου με $A=2.0$	90
5.2.11 Μελέτη του Δικτύου με $A=2.1$	91
5.2.12 Μελέτη του Δικτύου με $A=2.2$	92
5.2.13 Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα.....	93
5.2.14 Σχολιασμός των αποτελεσμάτων.....	94
5.2.15 Μια δοκιμή του Fuzzy SVM δικτύου με μεγάλο κατώφλι για την επιλογή των διανυσμάτων στήριξης	95
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	99

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 2.1α: Ψευδοτραπεζοειδής συνάρτηση με $a < b < c < d$	27
Σχήμα 2.1β: Ψευδοτραπεζοειδής συνάρτηση με $a < b = c < d$	27
Σχήμα 2.1γ: Ψευδοτραπεζοειδής συνάρτηση με $a = b < c < d$	28
Σχήμα 2.2: Συνεπή και Πλήρη Ασαφή σύνολα.....	28
Σχήμα 2.3: Ένα παράδειγμα της ιδιότητας 2: $c_i \leq a_{i+1} < d_i < b_{i+1} \leq c_{i+1}$	31
Σχήμα 2.4: Η δομική ομοιότητα μεταξύ των Ψευδοτραπεζοειδών συναρτήσεων συμμετοχής και των Ασαφών Συναρτήσεων Βάσης	32
Σχήμα 2.5: Ένα παράδειγμα της συνέπειας 2: $B_i(x) = T_1(x; a_1, a_1, c_1, d_1), B_2(x) = A_2(x)$ και $B_3(x) = T_3(x; a_3, b_3, d_3, d_3)$	33
Σχήμα 2.6: Ένα παράδειγμα όπου $A_i(x) = B_i(x)$ ($i = 1, 2, 3; N = 3$)	34
Σχήμα 3.1: Το βέλτιστο υπερεπίπεδο για γραμμικά διαχωρίσιμα πρότυπα.....	43
Σχήμα 3.2: (α) Στην περίπτωση αυτή, ένα σημείο πέφτει στην περιοχή του διαχωρισμού, αλλά στην σωστή πλευρά του επιπέδου απόφασης (β) Στην περίπτωση αυτή, το σημείο πέφτει στην λάθος πλευρά του επιπέδου απόφασης	46
Σχήμα 3.3: Μη γραμμική απεικόνιση από τον χώρο εισόδου στον χώρο χαρακτηριστικών.....	49
Σχήμα 3.4: Αρχιτεκτονική ενός SVM δικτύου	54
Σχήμα 4.1 Ομαδοποίηση του Χώρου Εισόδου και Κατασκευή των Ασαφών Συναρτήσεων Συμμετοχής από τα Διανύσματα Στήριξης.....	59
Σχήμα 4.2: Μορφή του SVM δικτύου	66
Σχήμα 4.3 : XOR πρόβλημα	68
Σχήμα 4.4 : Ομαδοποίηση από διανύσματα δύο διαστάσεων.....	69
Σχήμα 4.5: Ομαδοποίηση από τις τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής για το XOR πρόβλημα	71
Σχήμα 4.6: Ομαδοποίηση από κάθε ένα από τα τέσσερα διανύσματα του συνόλου εκμάθησης για το XOR πρόβλημα	72
Σχήμα 5.1: Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου από το Fuzzy SVM δίκτυο.....	78
Σχήμα 5.2: Παραδείγματα αδύναμης συνέπειας: (α) οι $A_1(x)$ και $A_2(x)$ δεν είναι αδύναμα συνεπείς. (β) οι $A_1(x)$ και $A_2(x)$ είναι αδύναμα συνεπείς.....	80
Σχήμα 5.3: Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.1$	81
Σχήμα 5.4 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.2$	82
Σχήμα 5.5 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.3$	83
Σχήμα 5.6 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.4$	84
Σχήμα 5.7 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.5$	85
Σχήμα 5.8 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.6$	86
Σχήμα 5.9 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.7$	87
Σχήμα 5.10 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.8$	88
Σχήμα 5.11 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.9$	89
Σχήμα 5.12 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=2.0$	90
Σχήμα 5.13 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=2.1$	91
Σχήμα 5.14 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=2.2$	92
Σχήμα 5.15 Μεταβολή του αριθμού των διανυσμάτων στήριξης σε συνάρτηση με την παράμετρο A	93

Σχήμα 5.16 Μεταβολή του των ποσοστών επιτυχίας συνόλου εκμάθησης και συνόλου δοκιμής σε συνάρτηση με την παράμετρο A	93
Σχήμα 5.17 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=2.2$	96

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 3.1: Οι πλέον συνηθισμένοι πυρήνες εσωτερικού γινομένου που χρησιμοποιούνται στις Μηχανές Διανυσμάτων Στήριξης	52
Πίνακας 4.1: XOR πρόβλημα	68
Πίνακας 5.1: Αποτελέσματα Εξομοίωσης του Fuzzy SVM δικτύου.....	78
Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.1$	81
Πίνακας 5.3: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.2$	82
Πίνακας 5.4: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.3$	83
Πίνακας 5.5: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.4$	84
Πίνακας 5.6: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.5$	85
Πίνακας 5.7: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.6$	86
Πίνακας 5.8: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.7$	87
Πίνακας 5.9: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.8$	88
Πίνακας 5.10: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.9$	89
Πίνακας 5.11: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=2.0$	90
Πίνακας 5.12: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=2.1$	91
Πίνακας 5.13: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=2.2$	92
Πίνακας 5.14: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.5$ και μεγάλο κατώφλι.....	97

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά – Βασικές Έννοιες

1.1.1 Τι είναι τα Νευρωνικά Δίκτυα;

Τα Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα, ή απλά Νευρωνικά Δίκτυα, αποτελούν ένα σύγχρονο πεδίο έρευνας, το οποίο ξεκινά από την παρατήρηση ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος λειτουργεί τελείως διαφορετικά από τον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή. Τα βασικά δομικά συστατικά του εγκεφάλου είναι οι νευρώνες, οι οποίοι είναι οργανωμένοι με τέτοιο τρόπο ώστε να εκτελούν διάφορους υπολογισμούς. Λόγω της βασικής διαφοράς της «αρχιτεκτονικής» του ανθρώπινου εγκεφάλου, αυτός μπορεί να εκτελεί σε ελάχιστο χρόνο υπολογισμούς μεγάλης πολυπλοκότητας, για τους οποίους ένας ταχύτατος Η/Υ χρειάζεται ίσως και μέρες.

Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος βασίζεται στην ικανότητα που έχει να οργανώνεται με βάση την εμπειρία. Αυτή ακριβώς την ικανότητα του εγκεφάλου μιμούνται τα Νευρωνικά Δίκτυα, τα οποία αποτελούνται από τεχνητούς νευρώνες και αποκτούν την γνώση μέσα από μια διαδικασία μάθησης. Κατά την διαδικασία αυτή, οι συνάψεις (βάρη) των Νευρώνων του δικτύου προσαρμόζονται προκειμένου να αποθηκεύσουν την γνώση. Υπάρχουν, ωστόσο και περιπτώσεις δικτύων που αλλάζουν την τοπολογία τους, κάτι που απορρέει από την ιδιότητα του εγκεφάλου να φτιάχνει νέους νευρώνες και συνάψεις. Στα Νευρωνικά Δίκτυα, ο νευρώνας είναι μια μονάδα επεξεργασίας πληροφορίας και αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο τους.

Η βασική διαφορά με τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές είναι ότι ενώ αυτοί χρειάζονται μια περιγραφή της λύσης του προβλήματος, τα Νευρωνικά

Δίκτυα εκπαιδεύονται συνήθως με την χρήση ενός συνόλου δεδομένων (σύνολο εκμάθησης) και με βάση αυτό μπορούν να μάθουν τις βασικές αρχές της λύσης του προβλήματος, δηλαδή αποκτούν «εμπειρία» μέσω παραδειγμάτων, ακριβώς όπως και ο ανθρώπινος εγκέφαλος.

Τα βασικότερα πλεονεκτήματα των Νευρωνικών Δικτύων είναι τα εξής:

- *Μη-Γραμμικότητα*: Οι Τεχνητοί Νευρώνες μπορούν να είναι και μη γραμμικοί. Η μη-γραμμικότητα είναι ξεχωριστή αφού είναι κατανεμημένη σε όλο το δίκτυο και είναι σημαντική μιας και συνήθως ο φυσικός μηχανισμός που είναι υπεύθυνος για την δημιουργία των εισόδων του δικτύου είναι μη γραμμικός.
- *Προσαρμογή*: Έχουν την ικανότητα να προσαρμόζουν τα βάρη τους σε αλλαγές στο περιβάλλον.
- *Αυτο-Οργάνωση*: Ένα Νευρωνικό Δίκτυο μπορεί να δημιουργήσει την δική του οργάνωση κατά την διαδικασία της εκπαίδευσης.
- *Ανοχή Σφαλμάτων*: Ένα Νευρωνικό Δίκτυο μπορεί να συνεχίσει να λειτουργεί ακόμη και αν «καταστραφούν» κάποιοι από τους Νευρώνες του λόγω της κατανεμημένης γνώσης που υπάρχει στο δίκτυο.

Η δομή ενός Νευρωνικού Δικτύου είναι παρόμοια με αυτήν του ανθρώπινου εγκεφάλου. Το δίκτυο είναι οργανωμένο σε επίπεδα, κάθε ένα από τα οποία αποτελείται από ένα σύνολο από Νευρώνες. Οι Νευρώνες συνδέονται μεταξύ τους με συνάψεις, κάθε μια από τις οποίες έχει ένα βάρος. Υπάρχει πάντα ένα επίπεδο εισόδου που επικοινωνεί με το περιβάλλον και ένα επίπεδο εξόδου που παρέχει την απόκριση του δικτύου στην διέγερση από το περιβάλλον. Τα υπόλοιπα επίπεδα συνήθως είναι κρυφά, δηλαδή δεν επικοινωνούν με το περιβάλλον.

Όσον αφορά την μάθηση, τα είδη της μπορούν να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- *Επιβλεπόμενη (Supervised) Μάθηση*: Στην περίπτωση αυτή, η γνώση αναπαρίσταται με ένα σύνολο από παραδείγματα εισόδων-εξόδων. Τα βάρη του δικτύου προσαρμόζονται με τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα μεταξύ της επιθυμητής απόκρισης και της απόκρισης του δικτύου. Όταν «μεταφερθεί» η γνώση αυτή στο δίκτυο, κάτι που θα επιτευχθεί με την ελαχιστοποίηση του σφάλματος, τότε η εκπαίδευση του δικτύου σταματά.
- *Μη Επιβλεπόμενη (Unsupervised/Self Organized) Μάθηση*: Στην περίπτωση αυτή παρέχονται μόνο κάποιες είσοδοι στο σύστημα. Δεν δίνεται εκ των προτέρων ο τρόπος κατηγοριοποίησης των εισόδων αλλά αυτό το αναλαμβάνει μόνο του το σύστημα, το οποίο «μαθαίνει» από τις διάφορες στατιστικές κανονικότητες του συνόλου των δεδομένων. Ένας τρόπος μη επιβλεπόμενης μάθησης είναι με την χρήση ανταγωνιστικής μάθησης.
- *Ενισχυτική (Reinforcement) Μάθηση*: Στην μάθηση αυτή, υπάρχει συνεχής αλληλεπίδραση του δικτύου με το περιβάλλον προκειμένου το δίκτυο να «μάθει» μια απεικόνιση εισόδου/εξόδου. Στην μάθηση αυτή δεν δίνεται στο δίκτυο η επιθυμητή απόκριση, αλλά μόνο το αν η απόκρισή του είναι σωστή ή λάθος.

1.1.2 Ασαφής Λογική, Ασαφή Σύνολα και Ασαφή Συστήματα

Η θεωρία των ασαφών συνόλων παρουσιάστηκε από τον Zadeh το 1965 και αποτελεί το υπόβαθρο της ασαφούς λογικής και των ασαφών συστημάτων. Στηρίζεται στην αμφισβήτηση της κλασσικής συνολοθεωρίας, όπου ένα στοιχείο μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει σε ένα σύνολο. Έτσι, σύμφωνα με την ασαφή θεωρία, ένα στοιχείο μπορεί να ανήκει και να μην ανήκει σε ένα σύνολο. Η ασαφής λογική, που στηρίζεται στην θεωρία των ασαφών συνόλων, αποτελεί ένα μέσο μεταφοράς της εμπειρικής γνώσης στα βασισμένα στη γνώση συστήματα. Και αυτό, γιατί οι προσεγγίσεις που βασίζονται στην

κανονική λογική δεν μπορούν να αναπαραστήσουν την γνώση με επιτυχία, ιδιαίτερα σε πολύπλοκα συστήματα, αφού οι περισσότερες έννοιες είναι ασαφείς, αφού η γνώση από την φύση της παρουσιάζει λεκτικές ανακρίβειες. Τις ανακρίβειες αυτές έρχεται να αντιμετωπίσει η ασαφής λογική, η οποία και παρέχει το μαθηματικό πλαίσιο για τον χειρισμό των ανακριβειών αυτών και έτσι επιτυγχάνεται η μεταφορά εμπειρίας στο σύστημα. Έτσι, ένα σύστημα που χρησιμοποιεί ασαφή λογική μπορεί να λάβει την σωστή απόφαση βασιζόμενο σε ελλιπή και αβέβαια δεδομένα.

Ένας τρόπος για την οργάνωση ενός συστήματος που χρησιμοποιεί ασαφή λογική είναι με την χρήση ασαφών κανόνων. Οι κανόνες αυτοί είναι είναι ένα σύνολο δηλώσεων της μορφής *AN-TOTE* (if-then). Με αυτόν τον τρόπο η γνώση που υπάρχει κωδικοποιείται και έτσι δημιουργείται ένα «έμπειρο σύστημα». Ένα τέτοιο σύστημα όταν εκτεθεί στα ίδια δεδομένα με κάποιον που κατέχει την γνώση αυτή και καλείται εμπειρογνώμονας, λειτουργεί με παρόμοιο τρόπο με αυτόν.

1.2 Σκοπός της Εργασίας

Στην εργασία αυτή ο σκοπός είναι η υλοποίηση και η μελέτη ενός νευρωνικού δικτύου το οποίο ονομάζεται Fuzzy SVM δίκτυο, και όπως και υπονοείται από το όνομά του, θα αποτελεί έναν συνδυασμό ασαφούς συστήματος και ενός SVM δικτύου. Το SVM δίκτυο αποτελεί έναν τύπο νευρωνικού δικτύου που στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται για διαχωρισμό προτύπων. Σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση των κανόνων ενός ασαφούς δικτύου με την χρησιμοποίηση αλγόριθμων βελτιστοποίησης που χρησιμοποιούνται στα SVM δίκτυα. Το Fuzzy SVM δίκτυο που προκύπτει χρησιμοποιείται για τον διαχωρισμό προτύπων και μπορεί να εκπαιδευτεί είτε με παραδείγματα, όπως το SVM δίκτυο, είτε με ασαφείς κανόνες *AN-TOTE*, όπως ένα ασαφές σύστημα.

Ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιεί τον διαχωρισμό ένα κλασσικό SVM δίκτυο στηρίζεται σε ένα μη γραμμικό μετασχηματισμό από τον χώρο εισόδου σε έναν χώρο μεγαλύτερης διάστασης στον οποίο το πρόβλημα γίνεται γραμμικά διαχωρίσιμο. Ο μετασχηματισμός αυτός στην περίπτωση του Fuzzy SVM δικτύου γίνεται με την χρησιμοποίηση ασαφών συναρτήσεων συμμετοχής και κατάλληλη ομαδοποίηση του χώρου εισόδου. Με βάση τα πρότυπα εισόδου και τις αποκρίσεις τους, τό σύστημα φτιάχνει τους δικούς του ασαφείς κανόνες με τους οποίους γίνεται ο διαχωρισμός των προτύπων, οι οποίοι και μπορούν να εξαχθούν μετά την εκπαίδευση του δικτύου. Ωστόσο, είναι δυνατόν ένα Fuzzy SVM δίκτυο να εκπαιδευθεί απλά από ένα σύνολο ασαφών κανόνων, όπως και κάθε ασαφές σύστημα.

1.3 Διάρθρωση της Εργασίας

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα Ασαφή Συστήματα και ο τρόπος με τον οποίο μπορούν να κατασκευαστούν από Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσης. Παρουσιάζεται, επίσης, ο τύπος των Ψευδοτραπεζοειδών Συναρτήσεων Συμμετοχής των Ασαφών Συνόλων και κάποιες πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητές τους, που οδηγούν στις Προσεγγιστικές ιδιότητες των Ασαφών Συστημάτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές αρχές που διέπουν την αρχιτεκτονική, την μάθηση και την λειτουργία των SVM δικτύων, οι πιο συνηθισμένοι τύποι πυρήνα που χρησιμοποιούνται καθώς και ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να επιλεγθεί ένας SVM πυρήνας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το σκεπτικό με το οποίο μπορούν τα SVM δίκτυα να χρησιμοποιήσουν πύρηνες βασισμένους σε ασαφείς συναρτήσεις βάσης, η μορφή του μετασχηματισμού, η μορφή του πυρήνα, ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η κατασκευή του Fuzzy SVM δικτύου και ο προσδιορισμός των βαρών του.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται η μελέτη του Fuzzy SVM δικτύου με κάποιες τροποποιήσεις, ώστε να μειώνεται ο αριθμός των κανόνων, χωρίς να επηρεάζεται σημαντικά η απόδοση του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ/ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2.1 Ασαφή Συστήματα

Γενικά, ως Ασαφές Σύστημα ορίζεται κάθε σύστημα του οποίου οι μεταβλητές (όχι απαραίτητα όλες) έχουν ως πεδίο ορισμού καταστάσεις οι οποίες είναι Ασαφή Σύνολα. Για κάθε μεταβλητή, τα Ασαφή Σύνολα είναι ορισμένα σε ένα σύνολο το οποίο είναι συνήθως ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Στην περίπτωση αυτή, τα ασαφή σύνολα είναι ασαφείς αριθμοί και οι σχετιζόμενες μεταβλητές είναι γλωσσικές μεταβλητές (linguistic terms).

Κάθε MIMO (Multi Input Multi Output) ασαφές σύστημα μπορεί να χωριστεί σε μια ομάδα από MISO (Multi Input Single Output) ασαφή συστήματα. Για το λόγο αυτό θα θεωρηθεί στην παρουσίαση αυτή ότι τα ασαφή συστήματα όπου τα αναφέρουμε είναι MISO: $f: U \subset \mathbb{R}^n \mapsto V \subset \mathbb{R}$, όπου $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \subset \mathbb{R}^n$ ο χώρος εισόδου και $V \subset \mathbb{R}$ ο χώρος εξόδου.

Ένα ασαφές σύστημα αποτελείται από 4 βασικά στοιχεία: ασαφοποιητή, ασαφή βάση κανόνων, ασαφή συλλογιστική μηχανή και αποασαφοποιητή. Θεωρείται ότι ο ασαφοποιητής είναι μονότιμος και η ασαφής βάση κανόνων αποτελείται από N κανόνες R_i της ακόλουθης μορφής:

$R_i: \text{AN } x_1 \text{ είναι } A_{i1} \text{ και } x_2 \text{ είναι } A_{i2} \text{ και } \dots \text{ και } x_n \text{ είναι } A_{in} \text{ ΤΟΤΕ } y \text{ είναι } C_i,$
 $i = 1, 2, \dots, N$

Όπου $x_j, (j = 1, 2, \dots, N)$ είναι οι μεταβλητές εισόδου στο ασαφές σύστημα και y είναι η μεταβλητή εξόδου και τα ασαφή σύνολα A_j στο U_j και C_i στο

V είναι γλωσσικές μεταβλητές (linguistic terms) με συναρτήσεις συμμετοχής $A_{ij}(x_j)$ και $C_i(y)$ αντίστοιχα. Κάθε κανόνας R_i μπορεί να θεωρηθεί ως μια ασαφής σχέση $A_i = A_{i1} \times A_{i2} \times \dots \times A_{in} \mapsto C_i$ και είναι ένα ασαφές σύνολο στο $U \times V = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \times V$ με συνάρτηση συμμετοχής $R_i(X, y) = A_{i1}(x_1) * A_{i2}(x_2) * \dots * A_{in}(x_n) * C_i(y)$, όπου $*$ είναι ένας τελεστής (πχ min ή product) και $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U, y \in V$.

Η ασαφής συλλογιστική μηχανή χρησιμοποιεί ασαφείς κανόνες από την βάση ασαφών κανόνων και κάνει μια απεικόνιση από τον χώρο εισόδου U στα ασαφή σύνολα του χώρου εξόδου V . Έστω A ένα αυθαίρετο ασαφές σύνολο του U . Τότε κάθε R_i καθορίζει ένα ασαφές σύνολο $V_{A \circ R_i}$ στο V :

$$V_{A \circ R_i}(y) = \sup_{X \in U} [A(X) * R_i(X, y)] = \sup_{X \in U} [A(X) * A_{i1}(x_1) * A_{i2}(x_2) * \dots * A_{in}(x_n) * C_i(y)] \quad (2.1)$$

Θεωρώντας ότι ο τελεστής $*$ είναι το αλγεβρικό γινόμενο, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$V_{A \circ R_i}(y) = \sup_{X \in U} [A(X) A_{i1}(x_1) A_{i2}(x_2) \dots A_{in}(x_n) C_i(y)] \quad (2.2)$$

Ο αποασαφοποιητής κάνει μια απεικόνιση από ασαφή σύνολα του V σε σημεία του V . Διαλέγοντας τον πιο συνηθισμένο αποασαφοποιητή, τον αποασαφοποιητή κέντρου βάρους, η προαναφερθείσα απεικόνιση γίνεται με τον εξής τρόπο:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^N y_i V_{A \circ R_i}(y_i)}{\sum_{i=1}^N V_{A \circ R_i}(y_i)} \quad (2.3)$$

όπου y_i είναι το σημείο του V στο οποίο η $C_i(y)$ παίρνει την μέγιστη τιμή. Όταν το C_i είναι κανονικό ασαφές σύνολο, μέγιστη τιμή του είναι η τιμή 1.

Όταν $A = A_X$ είναι ένας μονότιμος αποασαφοποιητής, τότε με δεδομένο ότι το C_i είναι κανονικό ασαφές σύνολο, και από την σχέση

$$V_{A \circ R_i}(y) = \prod_{j=1}^n A_{ij}(x_j) C_i(y), \text{ το ασαφές σύστημα μπορεί να εκφραστεί ως εξής:}$$

$$y = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\prod_{j=1}^n y_i [A_{ij}(x_j)]}{\sum_{i=1}^N \left[\prod_{j=1}^n A_{ij}(x_j) \right]} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\prod_{j=1}^n A_{ij}(x_j)}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n A_{ij}(x_j)} \right] y_i \quad (2.4)$$

όπου $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n = U \in \mathbb{R}^n$, $y_i \in V \subset \mathbb{R}$ είναι το σημείο στο οποίο η $C_i(y)$ παίρνει την μέγιστη τιμή και A_{ij} είναι ένα ασαφές σύνολο στο U_j ($j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, N$)

2.2 Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσης (Fuzzy Basis Functions) - Ορισμός

Με βάση την σχέση (2.4) προκύπτει το συμπέρασμα ότι ένα ασαφές σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί από γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων:

$$\frac{\prod_{j=1}^n A_{ij}(x_j)}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n A_{ij}(x_j)} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

και για τον λόγο ότι οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να οριστούν σαν συναρτήσεις βάσης ενός ασαφούς συστήματος, αναφέρονται σαν Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσης (Fuzzy Basis Functions – FBF's).

Ορισμός : Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσης

Ορίζονται οι ασαφείς συναρτήσεις βάσης ως εξής:

$$B_i(x) = B_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{A_i(X)}{\sum_{i=1}^N A_i(X)} = \frac{\prod_{j=1}^n A_{ij}(x_j)}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n A_{ij}(x_j)} \quad (2.5)$$

όπου $A_i(x) = A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n A_{ij}(x_j)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Έτσι το ασαφές σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν γραμμικό συνδυασμό ασαφών συναρτήσεων βάσης ως εξής:

$$f(X) = \sum_{i=1}^N B_i(X) y_i \quad (2.6)$$

όπου y_i είναι το σημείο στο οποίο η $C_i(y)$ παίρνει την μέγιστη τιμή της, η οποία υπενθυμίζεται ότι είναι ίση με 1 στην περίπτωση που το C_i είναι κανονικό ασαφές σύνολο.

2.3 Ψευδοτραπεζοειδείς Συναρτήσεις

Έστω ο χώρος εισόδου $U \subset \mathbb{R}$ και τα ασαφή σύνολα A_i ($i = 1, 2, \dots, N$) στο U είναι γλωσσικές μεταβλητές σε ασαφείς AN-TOTE κανόνες και $A_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) οι αντίστοιχες ασαφείς συναρτήσεις συμμετοχής. Η ψευδοτραπεζοειδής συνάρτηση είναι μια συνεχής συνάρτηση η οποία και ορίζεται ως εξής:

$$A(x; a, b, c, d, h) = \begin{cases} I(x), x \in [a, b) \\ h, x \in (b, c) \\ D(x) \in (c, d] \\ 0, x \in U - [a, d] \end{cases} \quad (2.7)$$

όπου $a \leq b \leq c \leq d, a < d, I(x) \geq 0$ είναι μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b)$ και $D(x) \geq 0$ είναι μια γνήσια φθίνουσα συνάρτηση στο $(c, d]$. Στην περίπτωση που μια συνάρτηση συμμετοχής ενός ασαφούς συνόλου A είναι ψευδοτραπεζοειδής συνάρτηση, τότε λέγεται Ψευδοτραπεζοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής και μπορεί να συμβολιστεί με $A(x) = A(x; a, b, c, d, h)$

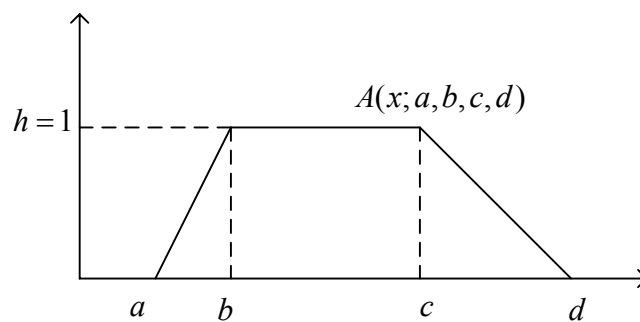
Παρατήρηση: Μια ειδική περίπτωση ψευδοτραπεζοειδών συναρτήσεων (συμμετοχής) αποτελούν οι τραπεζοειδείς συναρτήσεις που συμβολίζονται με $T(x; a, b, c, d, h)$ και $T(x; a, b, c, d)$ όταν $h=1$. Σ' αυτές, όταν $b < c$ και:

$$I(x) = \frac{x-a}{b-a}, D(x) = \frac{x-d}{c-d}$$

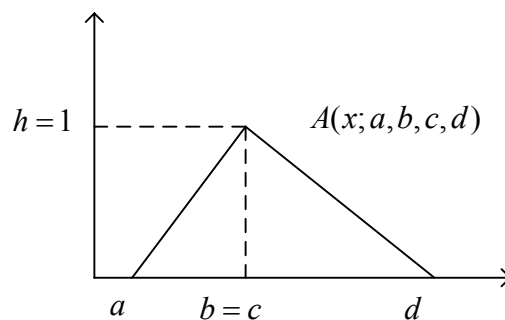
και μια ειδική περίπτωση τραπεζοειδών συναρτήσεων αποτελούν οι τριγωνικές συναρτήσεις, που συμβολίζονται με $\Delta(x, a, b, c, d, h)$ και $\Delta(x, a, b, c, d)$ όταν $h=1$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $b = c$ και:

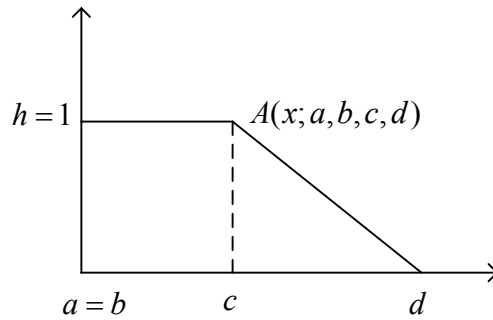
$$I(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-a}{c-a}, D(x) = \frac{x-d}{c-d} = \frac{x-d}{b-d}$$



Σχήμα 2.1α: Τραπεζοειδής συνάρτηση με $a < b < c < d$



Σχήμα 2.1β: Τραπεζοειδής συνάρτηση με $a < b=c < d$



Σχήμα 2.1γ: Τραπεζοειδής συνάρτηση με $a=b < c < d$

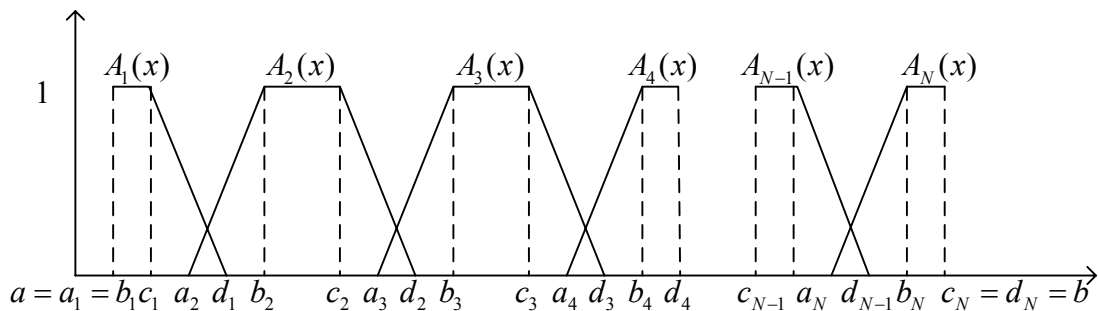
2.4 Ιδιότητες των Ασαφών Συνόλων

2.4.1 Πληρότητα

Τα ασαφή σύνολα A_1, A_2, \dots, A_N αποτελούν μια πλήρη διαμέριση στο U αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει $A_i (1 \leq i \leq n)$, έτσι ώστε $A_i(x) \geq 0$. Ακολουθως, όπου αναφέρεται ότι τα A_1, A_2, \dots, A_N είναι πλήρη, θα εννοείται ότι αποτελούν μια πλήρη διαμέριση.

2.4.2 Συνέπεια

Τα ασαφή σύνολα A_1, A_2, \dots, A_N είναι συνεπή αν $A_i(x_0) = 1$ για κάποιο $x_0 \in U$, τότε για κάθε $j \neq i, A_j(x_0) = 0$.



Σχήμα 2.2: Συνεπή και πλήρη ασαφή σύνολα A_i

2.4.3 Κανονικό υποσύνολο ενός κανονικού ασαφούς συνόλου

Το κανονικό υποσύνολο ενός ασαφούς συνόλου A ορίζεται ως εξής: $M(A) = \{x \mid x \in U \text{ και } A(x) = 1\}$, το οποίο αποτελεί ένα υποσύνολο του S_A , όπου S_A είναι το σύνολο στήριξης του ασαφούς συνόλου A . Στην περίπτωση των PTS συναρτήσεων συμμετοχής που περιγράφησαν πιο πάνω, $A(x) = A(x; a, b, c, d)$, θα είναι $M(A) = [b, c]$.

2.4.4 Κατάταξη μεταξύ ασαφών συνόλων

Για δύο κανονικά ασαφή σύνολα A και B στο U ορίζεται $A > B$ αν $M(A) > M(B)$. Π.χ. αν $x \in M(A)$ και $\hat{x} \in M(B)$, τότε $x > \hat{x}$.

Σχόλιο: Μιας και κάθε $x \in U$ αποτελεί πιθανή είσοδο του συστήματος, πρέπει να έχει μια έξοδο. Αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον ένας ασαφής κανόνας πρέπει να ενεργοποιείται για κάθε $x \in U$. Από αυτό γίνεται κατανοητό για ποιο λόγο πρέπει τα ασαφή σύνολα A_i να αποτελούν μια πλήρη διαμέριση στο U . Όσον αφορά τώρα την συνέπεια, αυτή είναι απαραίτητη για το λόγο ότι όταν υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα για μια μεταβλητή ότι ανήκει σε ένα ασαφές σύνολο (δηλαδή η συνάρτηση συμμετοχής της στο σύνολο αυτό είναι ίση με 1), δεν πρέπει να υπάρχει ασάφεια σε σχέση με το αν ανήκει και σε άλλο σύνολο (δηλαδή οι συναρτήσεις συμμετοχής στα άλλα ασαφή σύνολα πρέπει να είναι ίσες με 0).

Η παρακάτω πρόταση θα χρησιμοποιηθεί στην περιγραφή των ιδιοτήτων των Ασαφών Συναρτήσεων Βάσης:

Πρόταση: Αν τα A_i είναι συνεπή και κανονικά ασαφή σύνολα στο $U \subset \mathbb{R}$ με ψευδοτραπεζοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής $A_i(x) = A_i(x; a, b, c, d, h)$

$(i=1,2,\dots,N)$, τότε υπάρχει μια ανακατάταξη $\{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ του $\{1, 2, \dots, N\}$ τέτοια ώστε:

$$A_{i_1} < A_{i_2} < \dots < A_{i_N}$$

Με βάση την παραπάνω πρόταση, στο υπόλοιπο του κειμένου θα θεωρείται ότι $A_{i_1} < A_{i_2} < \dots < A_{i_N}$ αν τηρούνται οι προϋποθέσεις της πρότασης για τα A_1, A_2, \dots, A_N .

2.5 Ιδιότητες των Ασαφών Συναρτήσεων Βάσης

Ιδιότητα 1

Έστω ότι τα ασαφή σύνολα $A_i(x) (i=1,2,\dots,N)$ στο $U=[a,b]$ είναι κανονικά, συνεπή και πλήρη, με ψευδοτραπεζοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής:

$$A_i(x) = A_i(x; a, b, c, d, h) \quad (i=1,2,\dots,N) \text{ και } A_1 < A_2 < \dots < A_N \text{ (π.χ.}$$

$$M(A_1)=[b_1, c_1] < M(A_2)=[b_2, c_2] < \dots < M(A_N)=[b_N, c_N]), \text{ τότε:}$$

$$1) a_1 \leq a_2 < a_3 < \dots < a_N, d_1 < d_2 < \dots < d_{N-1} \leq d_N$$

$$2) A_1(a_1) > 0, A_i(a_i) = 0 (i=2,3,\dots,N), A_i(d_i) = 0 (i=1,2,\dots,N-1), A_N(d_N) > 0$$

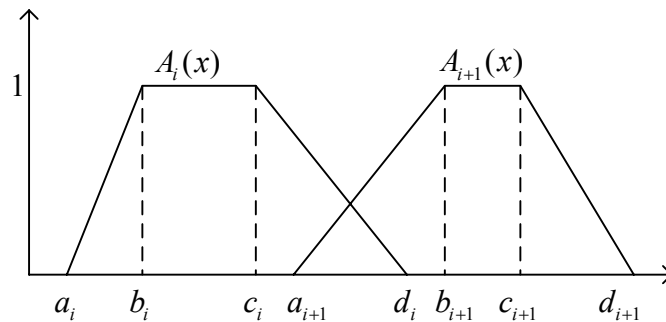
Ιδιότητα 2:

Έστω ότι τα ασαφή σύνολα $A_i(x) (i=1,2,\dots,N)$ στο $U=[a,b]$ είναι κανονικά, συνεπή και πλήρη, με ψευδοτραπεζοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής:

$$A_i(x) = A_i(x; a, b, c, d, h) \text{ και } A_1 < A_2 < \dots < A_N, \text{ τότε:}$$

$$c_i \leq a_{i+1} < d_i \leq b_{i+1} \leq c_{i+1}, i=1,2,\dots,N-1$$

Μια γραφική επεξήγηση της ιδιότητας 2 φαίνεται στο σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Ένα παράδειγμα της ιδιότητας 2: $c_i \leq a_{i+1} < d_i < b_{i+1} \leq c_{i+1}$

Θεώρημα :

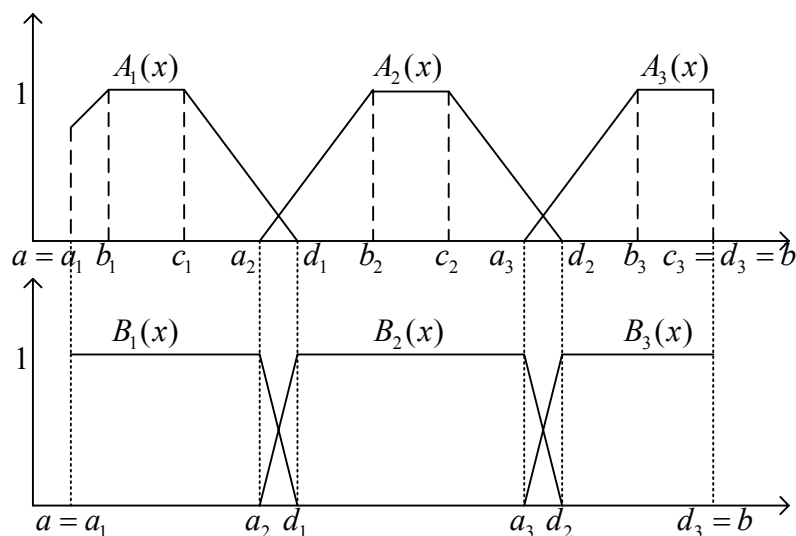
Έστω ότι τα ασαφή σύνολα $A_i(x) (i=1,2,\dots,N)$ στο $U=[a,b]$ είναι κανονικά, συνεπή και πλήρη, με ψευδοτραπεζοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής: $A_i(x) = A_i(x; a, b, c, d, h) (i=1,2,\dots,N)$ και $A_1 < A_2 < \dots < A_N$. Τότε, οι Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσης που προκύπτουν και συμβολίζονται με $B_i(x) (i=1,2,\dots,N)$, είναι ψευδοτραπεζοειδείς συναρτήσεις, και περιγράφονται ως εξής:

$$B_1(x) = B_1(x; a_1, a_1, a_2, d_1) = \begin{cases} 1, x \in [a_1, a_2] = [a, a_2] \\ \frac{A_1(x)}{A_1(x) + A_2(x)}, x \in (a_2, d_1] \\ 0, x \in U - [a_1, d_1] \end{cases} \quad (2.8)$$

$$B_i(x) = B_i(x; a_i, d_{i-1}, a_{i+1}, d_i) = \begin{cases} \frac{A_i(x)}{A_{i-1}(x) + A_i(x)}, x \in (a_i, d_{i-1}] \\ 1, x \in [d_{i-1}, a_{i+1}] \\ \frac{A_i(x)}{A_i(x) + A_{i+1}(x)}, x \in (a_{i+1}, d_i] \\ 0, x \in U - [a_i, d_i] \end{cases} \quad (2.9)$$

$$B_N(x) = B_N(x; a_N, d_{N-1}, d_N, d_N) = \begin{cases} 0, x \in U - [a_N, d_N] = U - [a_N, b] \\ \frac{A_N(x)}{A_{N-1}(x) + A_N(x)}, x \in [a_N, d_{N-1}] \\ 1, x \in [d_{N-1}, d_N] \end{cases} \quad (2.10)$$

Η δομική ομοιότητα μεταξύ των ψευδοτραπεζοειδών συναρτήσεων συμμετοχής $A_i(x)(i=1,2,\dots,N)$ και των Ασαφών Συναρτήσεων Βάσης $B_i(x)(i=1,2,\dots,N)$ μπορεί να φανεί καθαρά στο σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Η δομική ομοιότητα μεταξύ των Ψευδοτραπεζοειδών συναρτήσεων συμμετοχής $A_i(x)$ και των Ασαφών Συναρτήσεων Βάσης $B_i(x)$ ($i=1,2,3; N=3$)

Κάτω από κάποιες συνθήκες, είναι δυνατόν οι Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσεις να αποτελούν και αυτές Ψευδοτραπεζοειδείς συναρτήσεις και σε κάποιες περιπτώσεις να είναι ακόμα και ίσες με τις Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσης.

Συνέπεια 1

Έστω ότι α) τα ασαφή σύνολα $A_i(i=1,2,\dots,N)$ στο $U=[a,b]$ είναι κανονικά, συνεπή και πλήρη με $A_1 < A_2 < \dots < A_N$ και β) οι συναρτήσεις συμμετοχής $A_i(x) = T_i(x, a_i, b_i, c_i, d_i)(i=1,2,\dots,N)$ (τραπεζοειδείς συναρτήσεις)

και $d_i - c_i = b_{i+1} - a_{i+1} (i=1,2,\dots,N-1)$. Τότε, οι Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσης που προκύπτουν και συμβολίζονται με $B_i(x) (i=1,2,\dots,N)$, είναι τραπεζοειδείς συναρτήσεις που περιγράφονται από την σχέση:

$$B_i(x) = T_i(x; a_i, d_{i-1}, a_{i+1}, d_i), i=1,2,\dots,N$$

όπου $d_0 = a_1$ και $a_{N+1} = d_N$.

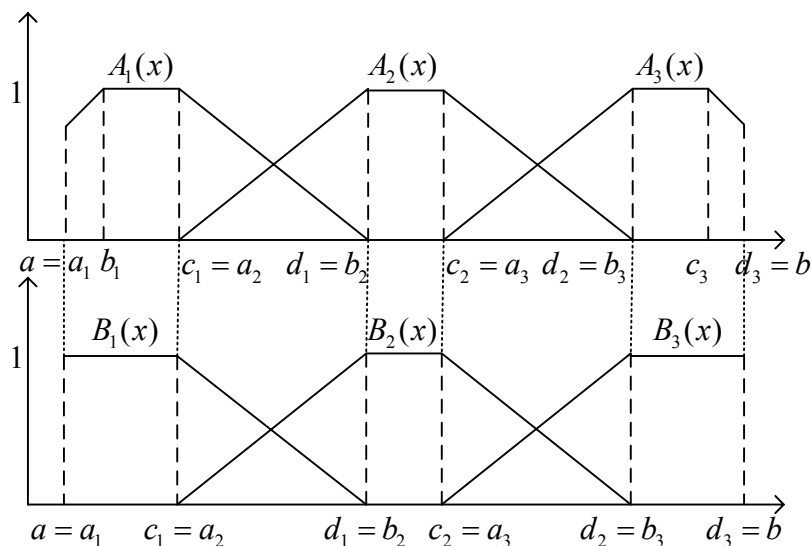
Συνέπεια 2:

Έστω ότι α) τα ασαφή σύνολα $A_i (i=1,2,\dots,N)$ στο $U=[a,b]$ είναι κανονικά, συνεπή και πλήρη με $A_1 < A_2 < \dots < A_N$ και β) οι συναρτήσεις συμμετοχής $A_i(x) = T_i(x; a_i, b_i, c_i, d_i) (i=1,2,\dots,N)$ (τραπεζοειδείς συναρτήσεις) και $c_i = a_{i+1}, d_i = b_{i+1} (i=1,2,\dots,N-1)$. Τότε οι Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσης $B_i(x)$ που προκύπτουν είναι ίσες με τις συναρτήσεις συμμετοχής $A_i(x)$ του ασαφούς συνόλου A_i για $2 \leq i \leq N-1$, δηλαδή:

$$B_1(x) = T_1(x; a_1, a_1, c_1, d_1)$$

$$B_i(x) = A_i(x) = T_i(x; a_i, b_i, c_i, d_i), i=2,3,\dots,N-1$$

$$B_N(x) = T_N(x; a_N, b_N, c_N, d_N)$$



Σχήμα 2.5: Ένα παράδειγμα της συνέπειας 2:

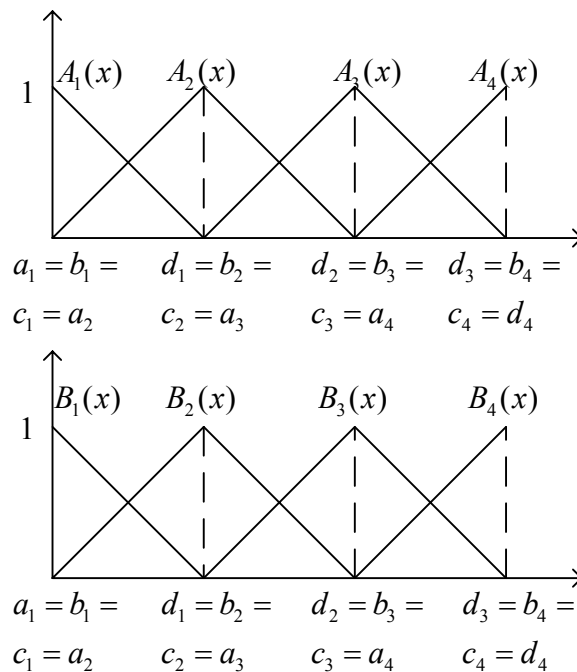
$$B_1(x) = T_1(x; a_1, a_1, c_1, d_1), B_2(x) = A_2(x) \text{ και } B_3(x) = T_3(x; a_3, b_3, d_3, d_3)$$

Παρατήρηση

Έστω τα ασαφή σύνολα $A_i (i=1,2,\dots,N)$ με τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής $\Delta_i(x; a_i, b_i, c_i, d_i)$ και $b_i = c_i$. Αν $c_i = a_{i+1}, d_i = b_{i+1} (i=1,2,\dots,N-1)$ και $a_1 = b_1, c_N = d_N$, τότε έχουμε ότι $A_i(x) = B_i(x) (i=1,2,\dots,N)$. Αν $d_0 = a_1, a_{N+1} = d_N$ τότε η (2.10) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$B_i(x) = B_i(x; a_i, d_{i-1}, a_{i+1}, d_i) = \begin{cases} \frac{A_i(x)}{A_{i-1}(x) + A_i(x)}, x \in [a_i, d_{i-1}) \\ 1, x \in [d_{i-1}, a_{i+1}] \\ \frac{A_i(x)}{A_i(x) + A_{i+1}(x)}, x \in (a_{i+1}, d_i] \\ 0, x \in U - [a_i, d_i] \end{cases} \quad (2.11)$$

όπου $i=1,2,\dots,N$



Σχήμα 2.6: Ένα παράδειγμα όπου $A_i(x) = B_i(x) (i=1,2,3; N=3)$

Παρατήρηση

Από την συνέχεια των $A_i(x) (i=1,2,\dots,N)$, προκύπτει ότι και οι $B_i(x)$ είναι συνεχείς στο $U = [a, b]$.

2.6 Προσεγγιστικές Ιδιότητες των Ασαφών Συστημάτων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται συνοπτικά οι προσεγγιστικές ιδιότητες των MISO ασαφών συστημάτων. Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν και για τα MIMO συστήματα αφού αποδεικνύεται ότι ένα MIMO σύστημα μπορεί να αναλυθεί σε ένα σύνολο από MISO συστήματα.

2.6.1 Βασική Προσεγγιστική Ιδιότητα

Θεωρούμε ότι α) Τα ασαφή σύνολα $A_i(x) (i=1,2,\dots,N)$ στο $U=[a,b]$ είναι κανονικά, συνεπή και πλήρη με ψευδοτραπεζοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής: $A_i(x) = A_i(x; a, b, c, d, h) (i=1,2,\dots,N)$ και $A_1 < A_2 < \dots < A_N$, β) Το ασαφές σύστημα:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N B_i(x) y_i$$

και $B_i(x) (i=1,2,\dots,N)$ είναι ασαφείς συναρτήσεις βάσης που έχουν οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τότε για μια πραγματική συνάρτηση $g(x)$ στο $U=[a,b]$,

$$|g(x) - f(x)| = |g(x) - y_i|, x \in M(B_i) = [d_{i-1}, a_{i+1}]$$

$$|g(x) - f(x)| = |g(x) - B_i(x)y_i - B_{i+1}(x)y_{i+1}| \leq \max\{|g(x) - y_i|, |g(x) - y_{i+1}|\},$$

$$x \in F(B_i, B_{i+1}) = (a_{i+1}, d_i)$$

2.6.2 Ομοιόμορφη Προσεγγιστική Ιδιότητα

Θεώρημα:

Έστω ότι α) Τα ασαφή σύνολα $A_i(x) (i=1,2,\dots,N)$ στο $U=[a,b]$ είναι κανονικά, συνεπή και πλήρη, με ψευδοτραπεζοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής:

$A_i(x) = A_i(x; a, b, c, d, h)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) και $A_1 < A_2 < \dots < A_N$, β) Το ασαφές σύστημα:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N B_i(x) y_i$$

και $B_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) είναι ασαφείς συναρτήσεις βάσης που έχουν οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για μια πραγματική συνάρτηση $g(x)$ στο $U = [a, b]$, αν:

$$\varepsilon_i = \sup_{x \in M(B_i)} |g(x) - y_i|, i = 1, 2, \dots, N$$

$$\delta_i = \sup_{x \in F(B_i, B_{i+1})} |g(x) - B_i(x) y_i - B_{i+1}(x) y_{i+1}|, i = 1, 2, \dots, N-1$$

και

$$\varepsilon_M = \max \{ \varepsilon_i, \delta_j \mid 1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq N-1 \}$$

τότε:

$$\sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| = \varepsilon_M$$

Θεώρημα:

Έστω ότι α) Τα ασαφή σύνολα $A_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) στο $U = [a, b]$ είναι κανονικά, συνεπή και πλήρη, με ψευδοτραπεζοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής: $A_i(x) = A_i(x; a, b, c, d, h)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) και $A_1 < A_2 < \dots < A_N$, β) Το ασαφές σύστημα:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N B_i(x) y_i$$

και $B_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) είναι ασαφείς συναρτήσεις βάσης που έχουν οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για μια πραγματική συνάρτηση $g(x)$ στο $U = [a, b]$, αν:

$$\varepsilon_i = \sup_{x \in S_{A_i}} |g(x) - y_i|, \varepsilon = \max \{ \varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq N \}$$

τότε:

$$\sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Παρατηρήσεις:

- Το πρώτο θεώρημα αυτής της παραγράφου μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε για τον έλεγχο αν ένα ασαφές σύστημα έχει την επιθυμητή ακρίβεια, είτε για βελτίωση της ακρίβειας της προσέγγισης
- Με το δεύτερο θεώρημα μπορεί να ελεγχθεί η ακρίβεια της προσέγγισης όταν δοθούν οι ασαφείς κανόνες AN-TOTE R_i .

2.6.3 Ιδιότητα Ομοιόμορφης Σύγκλισης

Θεωρούμε ότι α) Τα ασαφή σύνολα $A_i(x) (i=1,2,\dots,N)$ στο $U=[a,b]$ είναι κανονικά, συνεπή και πλήρη, με ψευδοτραπεζοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής: $A_i(x) = A_i(x; a, b, c, d, h) (i=1,2,\dots,N)$ και $A_1 < A_2 < \dots < A_N$, β) $\delta = \max \{d_i - a_i \mid 1 \leq i \leq N\}$ γ) Το ασαφές σύστημα:

$$f_\delta(x) = \sum_{i=1}^N B_i(x) y_i$$

και $B_i(x) (i=1,2,\dots,N)$ είναι ασαφείς συναρτήσεις βάσης που έχουν οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για μια πραγματική και συνεχή συνάρτηση $g(x)$ στο $U=[a,b]$, αν:

$$m_i = \min_{x \in [a_i, d_i]} g(x) \leq y_i \leq M_i = \max_{x \in [a_i, d_i]} g(x), i=1,2,\dots,N$$

τότε: $\limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in U} |g(x) - f_\delta(x)| = 0$

2.6.4 Παγκόσμια Προσεγγιστική Ιδιότητα

Θεώρημα:

Έστω $g(x)$ μια δοσμένη συνεχή συνάρτηση στο $U=[a,b]$ και $\varepsilon > 0$ ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Τότε υπάρχει ένα ασαφές σύστημα $f(x)$ τέτοιο ώστε:

$$\sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – SVM ΔΙΚΤΥΑ

3.1 Γενικά

Η βασική διαφορά που έχουν τα SVM δίκτυα από τους περισσότερους τύπους Νευρωνικών Δικτύων είναι ότι αποτελούν μια ακριβή υλοποίηση της μεθόδου ελαχιστοποίησης του δομικού ρίσκου. Αυτή η αρχή βασίζεται στο γεγονός ότι ο ρυθμός λάθους μιας μηχανής μάθησης σε δεδομένα ελέγχου (ρυθμός λάθους γενίκευσης) είναι φραγμένος από το άθροισμα του ρυθμού λάθους εκπαίδευσης και ενός όρου που εξαρτάται από την VC (Vapnik – Chervonenkis) διάσταση. Στην περίπτωση των γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων, το SVM δίκτυο μηδενίζει τον πρώτο όρο και ελαχιστοποιεί τον δεύτερο όρο. Για το λόγο αυτό ένα SVM δίκτυο μπορεί να εμφανίζει μεγάλη ικανότητα γενίκευσης.

Η μάθηση στα SVM δίκτυα είναι επιβλεπόμενη και γίνεται αφού δοθεί στο δίκτυο ολόκληρο το σύνολο εκμάθησης. Όπως και τα περισσότερα συστήματα με επιβλεπόμενη μάθηση, ένα SVM δίκτυο μπορεί να εκτελέσει εργασίες όπως ο διαχωρισμός προτύπων και η προσέγγιση συναρτήσεων. Η μάθηση γίνεται όπως και στα υπόλοιπα δίκτυα με την ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης κόστους. Ο τρόπος που γίνεται η μάθηση στο SVM δίκτυο αποτελεί ένα από τα μειονεκτήματά του. Αυτό, γιατί αφού τελειώσει η εκπαίδευση του δικτύου, αν υποθεθεί ότι βρίσκεται ακόμη ένα σύνολο εκμάθησης, δεν είναι δυνατόν να προστεθεί η νέα αυτή γνώση στο δίκτυο. Πρέπει να γίνει η εκπαίδευση από την αρχή, διαδικασία πολλές φορές χρονοβόρα. Αυτό το μειονέκτημα, όμως, αντισταθμίζεται από τα πλεονεκτήματα που έχουν τα SVM δίκτυα έναντι στους υπόλοιπους τύπους Νευρωνικών Δικτύων που θα φανούν στην συνέχεια.

3.2 Βασικές Έννοιες για τις Μηχανές Αναγνώρισης Προτύπων

3.2.1 Ένα φράγμα στην ικανότητα Γενίκευσης – Εμπειρικό Ρίσκο

Έστω ένα σύνολο από N παρατηρήσεις, το οποίο και ονομάζεται σύνολο εκμάθησης. Κάθε παρατήρηση αποτελείται από ένα ζεύγος: ένα διάνυσμα $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$ και την απόκρισή του d_i . Θεωρείται ότι υπάρχει μια άγνωστη κατανομή πιθανότητας $P(\mathbf{x}, d)$ με βάση την οποία προκύπτουν τα δεδομένα αυτά. Έστω μια μηχανή που έχει ως σκοπό να μάθει την αντιστοίχιση $\mathbf{x}_i \mapsto d_i$. Η μηχανή έχει οριστεί να κάνει ένα σύνολο από απεικονίσεις $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, a)$ όπου a μια παράμετρος και είναι ντετερμινιστική, δηλαδή για κάποια είσοδο \mathbf{x} και μια συγκεκριμένη επιλογή του a δίνει πάντα την ίδια έξοδο $f(\mathbf{x}, a)$. Η παράμετρος a επιλέγεται από την εκπαίδευση του δικτύου. Άρα για ένα Νευρωνικό Δίκτυο η παράμετρος αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι σχετίζεται με την επιλογή των βαρών του. Η ανεμενόμενη τιμή του ρυθμού λαθών για μια εκπαιδευμένη μηχανή είναι:

$$R(a) = \int \frac{1}{2} |d - f(\mathbf{x}, a)| dP(\mathbf{x}, y) \quad (3.1)$$

Η ποσότητα $R(a)$ ονομάζεται αναμενόμενο ρίσκο. Το εμπειρικό ρίσκο $R_{emp}(a)$ είναι η ποσότητα:

$$R_{emp}(a) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N |d_i - f(\mathbf{x}_i, a)| \quad (3.2)$$

και όπως φαίνεται, είναι ο μέσος ρυθμός λαθών που προκύπτει στο σύνολο εκμάθησης και είναι μια σταθερή τιμή για δεδομένο σύνολο εκμάθησης $\{\mathbf{x}_i, d_i\}_{i=1}^N$ και δεδομένη επιλογή του a . Η ποσότητα $\frac{1}{2} |d_i - f(\mathbf{x}_i, a)|$ καλείται απώλεια και μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0 και 1 όταν $d_i = \pm 1$. Έστω η τέτοιο ώστε $0 \leq \eta \leq 1$. Για απώλειες που παίρνουν τις τιμές αυτές με πιθανότητα $1 - \eta$, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα που θέτει ένα άνω φράγμα για το αναμενόμενο ρίσκο:

$$R(a) \leq R_{emp}(a) + \sqrt{\frac{h(\log(2l/h) + 1 - \log(\eta/4))}{l}} \quad (3.3)$$

όπου h είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος που είναι η VC διάσταση που αναφέρθηκε προηγουμένως. Αυτό που αντιπροσωπεύει το δεξί μέρος της σχέσης (3.3) είναι, δηλαδή, το άνω φράγμα για το ρίσκο με πιθανότητα h . Η σχέση (3.3) είναι χρήσιμη γιατί συνήθως το πρώτο της μέλος δεν μπορεί να υπολογιστεί. Το δεύτερο, αντίθετα, μπορεί να υπολογιστεί γνωρίζοντας την VC διάσταση.

3.2.2 VC διάσταση

Η VC διάσταση είναι μια ιδιότητα του συνόλου των συναρτήσεων $\{f(a)\}$. Όταν ένα σύνολο συναρτήσεων έχει VC διάσταση h , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα υποσύνολο του συνόλου εκμάθησης που περιέχει h σημεία που μπορούν να διαχωριστούν. Ο δεύτερος όρος της σχέσης (3.3) αυξάνεται όσο αυξάνεται το h . Έτσι, προτιμώνται μηχανές που έχουν όσο το δυνατόν μικρότερη VC διάσταση, θεωρώντας ότι έχουν ίδιο εμπειρικό ρίσκο. Παρά το ότι όπως θα περίμενε κανείς θα ήταν επιθυμητή η μεγάλη τιμή της, αυτό δεν γίνεται αφού όπως μπορεί να δειχθεί, ακόμα και άπειρη VC διάσταση δεν εγγυάται ότι θα μπορούν να διαχωρίζονται πολύ μικρά σύνολα διανυσμάτων.

3.3 Βέλτιστα Υπερεπίπεδα για διαχωρισμό γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων

Έστω ένα δυαδικό πρόβλημα και ένα σύνολο εκμάθησης $\{\mathbf{x}_i, d_i\}_{i=1}^N$, όπου d_i η απόκριση του διανύσματος \mathbf{x}_i . Έστω, επίσης, m η διάσταση του χώρου εισόδου. Επειδή το πρόβλημα είναι δυαδικό, κάθε διάνυσμα εισόδου μπορεί να

ανήκει μόνο σε μια από τις δύο κατηγορίες, με την πρώτη να συμβολίζεται με $d_i = +1$ και την δεύτερη με $d_i = -1$, δηλαδή $d_i \in \{-1, 1\}$. Ο σκοπός είναι η εύρεση ενός υπερεπιπέδου που να χωρίζει το σύνολο αυτό κατά τέτοιον τρόπο ώστε τα διανύσματα ίδιας κατηγορίας να αφήνονται στην ίδια πλευρά του. Η εξίσωση ενός τέτοιου υπερεπιπέδου έχει την μορφή:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0 \quad (3.4)$$

Για την σωστή ταξινόμηση των προτύπων εισόδου, πρέπει το διάνυσμα των βαρών \mathbf{w} και το bias b να προσδιοριστούν έτσι ώστε για κάθε διάνυσμα εισόδου, να ικανοποιείται η σχέση:

$$d_i(\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{x}_i + b) > 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

Αν υπάρχει ένα υπερεπίπεδο που να ικανοποιεί την εξίσωση (3.5), τότε το πρόβλημα είναι γραμμικά διαχωρίσιμο.

Αν \mathbf{w}_o και b_o είναι οι βέλτιστες τιμές για το διάνυσμα των βαρών και το bias, τότε το βέλτιστο υπερεπίπεδο περιγράφεται από την σχέση:

$$\mathbf{w}_o \cdot \mathbf{x} + b_o = 0 \quad (3.6)$$

Στην περίπτωση αυτή και κατ'αναλογία με την εξίσωση (3.4), θα ισχύει η:

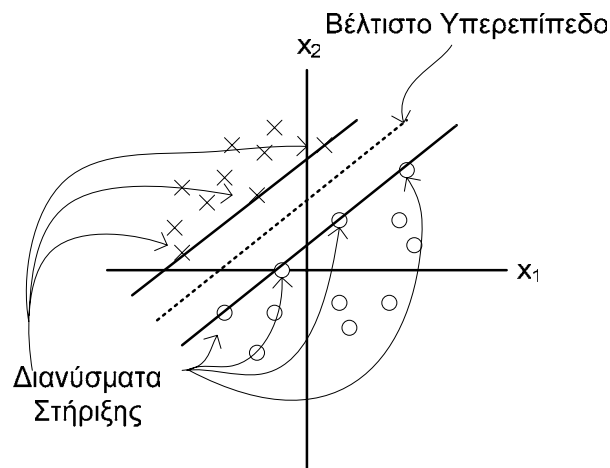
$$d_i(\mathbf{w}_o \cdot \mathbf{x}_i + b_o) \geq 1, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

Όταν η εξίσωση (3.5) ισχύει, τότε τα πρότυπα είναι γραμμικά διαχωρίσιμα και οι τιμές τόσο του \mathbf{w}_o , όσο και του b_o , μπορούν να μεταβληθούν ώστε να ισχύει η (3.7). Η μεταβολή αυτή δεν επηρεάζει την εξίσωση (3.6) που περιγράφει το βέλτιστο υπερεπίπεδο. Τα δεδομένα $\{\mathbf{x}_i, d_i\}$ για τα οποία η (3.7) ισχύει σαν ισότητα ονομάζονται «Διανύσματα Στήριξης» (Support Vectors) και από αυτά προκύπτει το όνομα Support Vector Machine. Τα διανύσματα αυτά παίζουν τον πιο σημαντικό ρόλο, μιας και είναι αυτά που βρίσκονται πιο κοντά στο επίπεδο απόφασης και άρα και δυσκολότερο να ταξινομηθούν. Και προφανώς, μετακίνησή τους αλλάζει την λύση του προβλήματος, αφού οδηγεί σε άλλο βέλτιστο υπερεπίπεδο. Αν d_+ (d_-) η ελάχιστη απόσταση μεταξύ του κοντινότερου θετικού (αρνητικού) δεδομένου, τότε αφού αυτά τα δεδομένα

βρίσκονται στα υπερεπίπεδα $\mathbf{w}_o \cdot \mathbf{x} + b_o = \pm 1$, θα είναι $d_+ = d_- = \frac{1}{\|\mathbf{w}_o\|}$. Άρα το να

βρεθεί το βέλτιστο υπερεπίπεδο συνεπάγεται την ελαχιστοποίηση της ευκλείδειας νόρμας του $\|\mathbf{w}\|$. Η ποσότητα $\frac{2}{\|\mathbf{w}\|}$ ονομάζεται «απόσταση διαχωρισμού» και προφανώς το βέλτιστο υπερεπίπεδο είναι εκείνο που μεγιστοποιεί την απόσταση αυτή και αυτό προσπαθεί να κάνει ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται. Είναι επίσης προφανές ότι όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση διαχωρισμού, τόσο μεγαλύτερη είναι η ικανότητα για γενίκευση.

Στο σχήμα 3.1 φαίνεται η υλοποίηση της μεθόδου του βέλτιστου υπερεπιπέδου για γραμμικά διαχωρίσιμα πρότυπα:



Σχήμα 3.1: Το βέλτιστο υπερεπίπεδο για γραμμικά διαχωρίσιμα πρότυπα

3.4 Βελτιστοποίηση για την εύρεση του Βέλτιστου Υπερεπιπέδου στην περίπτωση γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων

Η μέθοδος που θα περιγραφεί χρησιμοποιεί το σύνολο εκμάθησης $\{(\mathbf{x}_i, d_i)\}_{i=1}^N$ για την εύρεση του βέλτιστου υπερεπιπέδου, σύμφωνα με τον περιορισμό:

$$d_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

όπου στην σχέση (3.7) έχουν αντικατασταθεί τα w_o, b_o από τα w, b . Στόχος είναι η μεγιστοποίηση της απόστασης διαχωρισμού και αυτό πραγματοποιείται με την εύρεση των βέλτιστων τιμών των w, b έτσι ώστε να ικανοποιείται η (3.8) και το διάνυσμα βάρους w να ελαχιστοποιεί την συνάρτηση κόστους:

$$\Phi(w) = \frac{1}{2} w \cdot w \quad (3.9)$$

Από την στιγμή που η συνάρτηση αυτή είναι κυρτή, η ελαχιστοποίησή της με γραμμικούς περιορισμούς μπορεί να επιτευχθεί με την χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange. Η συνάρτηση που κατασκευάζεται είναι η εξής:

$$J(w, b, a) = \frac{1}{2} w \cdot w - \sum_{i=1}^N a_i [d_i (w \cdot x_i + b) - 1] \quad (3.10)$$

η οποία και πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ως προς τα w, b . Από τον μηδενισμό της παραγώγου της J μια φορά ως προς w και μια ως προς b , δηλαδή $\frac{\partial J(w, b, a)}{\partial w} = 0$ και $\frac{\partial J(w, b, a)}{\partial b} = 0$, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$w = \sum_{i=1}^N a_i d_i x_i \quad (3.11)$$

από τον μηδενισμό της παραγώγου ως προς το διάνυσμα βάρους, και:

$$\sum_{i=1}^N a_i d_i = 0 \quad (3.12)$$

από τον μηδενισμό της παραγώγου ως προς το bias b . Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που προκύπτει, με χρήση των περιορισμών αυτών καταλήγει στην μεγιστοποίηση της συνάρτησης:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^N a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j d_i d_j x_i \cdot x_j \quad (3.13)$$

με τους περιορισμούς (1) $\sum_{i=1}^N a_i d_i = 0$ και (2) $a_i \geq 0, i=1, 2, \dots, N$, όπου $\{a_i\}_{i=1}^N$

είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται δυϊκό του προβλήματος βελτιστοποίησης και έχει να κάνει μόνο με το σύνολο εκμάθησης και όχι με το βάρος w ή το bias b . Αφού βρεθούν οι πολλαπλασιαστές Lagrange, που συμβολίζονται με $a_{o,i}$, το βέλτιστο διάνυσμα βάρους w_o δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{w}_o = \sum_{i=1}^N a_{o,i} d_i \mathbf{x}_i \quad (3.14)$$

και αφού υπολογιστεί το \mathbf{w}_o , το βέλτιστο bias b_o μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση:

$$b_o = 1 - \mathbf{w}_o \cdot \mathbf{x}^{(s)} \quad (3.15)$$

θεωρώντας ότι $d^{(s)} = +1$.

Πρέπει εδώ να επισημάνουμε ότι υπάρχει ένας πολλαπλασιαστής Lagrange a_i για κάθε σημείο εκμάθησης (\mathbf{x}_i, d_i) . Τα διανύσματα για τα οποία ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστής Lagrange a_i είναι θετικός αντιστοιχούν στα διανύσματα στήριξης. Για όλα τα άλλα διανύσματα εκμάθησης είναι $a_i = 0$. Αν οποιοδήποτε από τα διανύσματα εκμάθησης εκτός των διανυσμάτων στήριξης μετακινηθεί, παραμένοντας όμως στην σωστή πλευρά του υπερεπίπεδου διαχωρισμού, ή αφαιρεθεί τελείως, ο αλγόριθμος θα καταλήξει ακριβώς στο ίδιο βέλτιστο υπερεπίπεδο.

3.5 Βέλτιστα Υπερεπίπεδα για διαχωρισμό μη γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων

Στην περίπτωση που δίνεται ένα μη γραμμικά διαχωρίσιμο σύνολο εκμάθησης, δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί κάποιο υπερεπίπεδο που να μην κάνει λάθη. Έτσι, σκοπός είναι να κατασκευαστεί το υπερεπίπεδο που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθους.

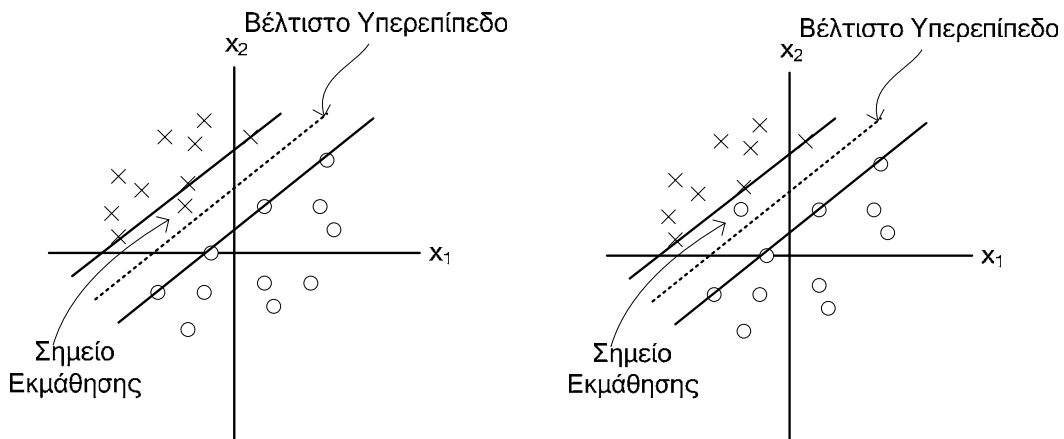
Η απόσταση διαχωρισμού λέγεται χαλαρή αν υπάρχει κάποιο διάνυσμα στο σύνολο εκμάθησης που να παραβιάζει την γνωστή συνθήκη:

$$d_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1, i = 1, 2, \dots, N$$

Με βάση τον τρόπο που περιγράφηκε πιο πάνω, υπάρχουν δύο τρόποι για να παραβιάζεται η παραπάνω συνθήκη:

- Το διάνυσμα (\mathbf{x}_i, d_i) να βρίσκεται στην σωστή μεριά αλλά μέσα στην περιοχή διαχωρισμού. Αυτό δεν σημαίνει ότι έχουμε λάθος κατάταξη.
- Το διάνυσμα (\mathbf{x}_i, d_i) να βρίσκεται στην λάθος πλευρά του επιπέδου απόφασης.

Οι δύο αυτές καταστάσεις, παριστάνονται στο σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: (α) Στην περίπτωση αυτή, ένα σημείο \mathbf{x}_i πέφτει στην περιοχή του διαχωρισμού, αλλά στην σωστή πλευρά του επιπέδου απόφασης (β) Στην περίπτωση αυτή, το σημείο πέφτει στην λάθος πλευρά του επιπέδου απόφασης

Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τις ψευδομεταβλητές $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ και έτσι η σχέση (3.8) γίνεται:

$$d_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.16)$$

Οι μεταβλητές ξ_i μετράνε την απόσταση ενός σημείου από την ιδανική περίπτωση. Για $0 \leq \xi_i \leq 1$, το σημείο πέφτει μέσα στην περιοχή διαχωρισμού, αλλά στην σωστή πλευρά, ενώ για $\xi_i > 1$ πέφτει στην λάθος πλευρά του υπερεπιπέδου. Στην περίπτωση αυτή, τα διανύσματα στήριξης είναι αυτά που

ικανοποιούν την (3.16) ως ισότητα, ακόμα και για μη μηδενική τιμή του ξ_i . Μια εκτίμηση για το άνω φράγμα των λαθών είναι η ποσότητα $\sum \xi_i$.

3.6 Βελτιστοποίηση για την εύρεση του Βέλτιστου Υπερεπιπέδου στην περίπτωση μη γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων

Το βέλτιστο υπερεπίπεδο στην περίπτωση αυτή θα δίνεται από την λύση του ακόλουθου προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$\Phi(\mathbf{w}, \xi) = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^N \xi_i \quad (3.17)$$

Η ελαχιστοποίηση του πρώτου όρου σχετίζεται με την ελαχιστοποίηση της VC διάστασης του SVM δικτύου και άρα με τον έλεγχο της μάθησης. Όσον αφορά την ελαχιστοποίηση του δεύτερου όρου, αυτή έχει να κάνει με την ελαχιστοποίηση του αριθμού των λαθών. Η παράμετρος C προκαθορίζεται από τον χρήστη και αποτελεί έναν συμβιβασμό μεταξύ πολυπλοκότητας της μηχανής και του αριθμού των μη διαχωρίσιμων σημείων.

Δουλεύοντας όπως στην προηγούμενη περίπτωση των γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων, το πρόβλημα ανάγεται στο δυϊκό του, το οποίο είναι το εξής: Δοθέντος του συνόλου εκμάθησης $\{(\mathbf{x}_i, d_i)\}_{i=1}^N$, πρέπει να βρεθούν οι πολλαπλασιαστές Lagrange $\{a_i\}_{i=1}^N$ που μεγιστοποιούν την συνάρτηση:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^N a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j d_i d_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$$

με τους περιορισμούς (1) $\sum_{i=1}^N a_i d_i = 0$ και (2) $0 \leq a_i \leq C, i = 1, 2, \dots, N$, όπου C μια

θετική παράμετρος που καθορίζεται από τον χρήστη. Παρατηρούμε ότι στο δυϊκό πρόβλημα δεν εμφανίζονται πουθενά οι ψευδομεταβλητές ξ_i και ότι ο δεύτερος περιορισμός είναι στην περίπτωση αυτή πιο αυστηρός, καθώς οι a_i

έχουν το C σαν άνω φράγμα. Η βέλτιστη λύση για το διάνυσμα βάρους \mathbf{w} δίνεται από:

$$\mathbf{w}_o = \sum_{i=1}^n a_{o,i} d_i \mathbf{x}_i \quad (3.18)$$

όπου n ο αριθμός των διανυσμάτων στήριξης. Το bias στην περίπτωση αυτή δίνεται από την σχέση:

$$a_i [d_i (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1 + \xi_i] = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.19)$$

και

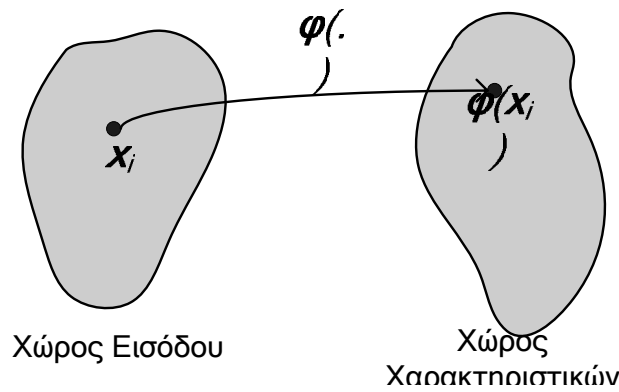
$$\mu_i \xi_i = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.20)$$

όπου μ_i πολλαπλασιαστές Lagrange που εισάγονται για να εξασφαλίσουν ότι οι ψευδομεταβλητές ξ_i είναι μη αρνητικές.

3.7 Κατασκευή ενός SVM δικτύου για διαχωρισμό προτύπων

Στην περίπτωση της κατασκευής ενός SVM δικτύου για διαχωρισμό προτύπων, χρήσιμη είναι η ιδιότητα ότι τα πρότυπα που δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμα στον χώρο εισόδου, μπορεί να είναι γραμμικά διαχωρίσιμα σε έναν άλλο χώρο διαφορετικής διάστασης, με έναν μη γραμμικό μετασχηματισμό. Στον χώρο αυτό θα κατασκευαστεί ένα υπερεπίπεδο διαχωρισμού, το οποίο θα διαχωρίσει τις εικόνες πια των προτύπων. Το υπερεπίπεδο αυτό θα είναι μια γραμμική συνάρτηση όχι πια των προτύπων, αλλά των εικόνων τους στον νέο χώρο.

Ο λόγος που γίνεται ο μετασχηματισμός στον χώρο μεγαλύτερης διάστασης, που θα αναφέρεται από δω και στο εξής ως «χώρος χαρακτηριστικών», έχει σχέση με το θεώρημα του Cover σε σχέση με τον διαχωρισμό των προτύπων (Cover, 1965):



Σχήμα 3.3: Μη γραμμική απεικόνιση ϕ_i από τον χώρο εισόδου στον χώρο χαρακτηριστικών

«Ένα πολύπλοκο πρόβλημα που οδηγήθηκε σε έναν χώρο μεγάλης διάστασης με έναν μη γραμμικό μετασχηματισμό είναι πιθανότερο να είναι γραμμικά διαχωρίσιμο εκεί παρά σε έναν χώρο μικρής διάστασης.»

Έστω m η διάσταση του χώρου εισόδου και n η διάσταση του χώρου χαρακτηριστικών. Έστω, επίσης, ένα προκαθορισμένο σύνολο μη γραμμικών μετασχηματισμών $\{\phi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^n$. Το υπερεπίπεδο που κατασκευάζεται στον χώρο χαρακτηριστικών θα έχει την μορφή:

$$\sum_{j=1}^n w_j \phi_j(\mathbf{x}) + b = 0 \quad (3.21)$$

και αν αντικατασταθεί το bias με w_0 , και παράλληλα θεωρηθεί ότι $\phi_0(\mathbf{x}) = 1$ για κάθε διάνυσμα \mathbf{x} , η σχέση (3.21) μπορεί να γραφτεί πιο απλά ως εξής:

$$\sum_{j=0}^{m_1} w_j \phi_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.22)$$

Μετά τον μη γραμμικό μετασχηματισμό, η εικόνα του διανύσματος \mathbf{x} στον χώρο χαρακτηριστικών θα έχει πια την μορφή:

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = [\phi_0(\mathbf{x}) \phi_1(\mathbf{x}) \dots \phi_n(\mathbf{x})]^T \quad (3.23)$$

Με βάση την σχέση (3.23), η (3.22) μπορεί να γραφεί με την μορφή εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων:

$$\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.24)$$

Από την σχέση (3.11) που δίνει το διάνυσμα βάρους μετά την βελτιστοποίηση, στην περίπτωση των γραμμικά διαχωρίσιμων σημείων, αλλά αντικαταστήσουμε το x_i με την εικόνα του στον χώρο χαρακτηριστικών $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i)$, προκύπτει η σχέση:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N a_i d_i \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) \quad (3.25)$$

Το διάνυσμα βάρους μπορεί να αντικατασταθεί στην σχέση (3.24) και να προκύψει η ακόλουθη σχέση για το βέλτιστο υπερεπίπεδο:

$$\sum_{i=1}^N a_i d_i \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.26)$$

Στην σχέση αυτή εμφανίζεται το εσωτερικό γινόμενο των $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i)$ το οποίο μπορεί να συμβολιστεί με:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=0}^{m_i} \phi_j(\mathbf{x}) \cdot \phi_j(\mathbf{x}_i) \quad (3.27)$$

Η ποσότητα $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ ονομάζεται πυρήνας εσωτερικού γινομένου (inner-product kernel). Με την βοήθεια της (3.27), η (3.26) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\sum_{i=1}^N a_i d_i K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = 0 \quad (3.28)$$

3.8 Το θεώρημα του Mercer

Το θεώρημα του Mercer (Mercer, 1908, Courant and Hilbert, 1970) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Έστω $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ ένας συμμετρικός ($K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$) πυρήνας, ο οποίος είναι ορισμένος στο $\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ και αντίστοιχα και για το \mathbf{x}_i . Ο πυρήνας μπορεί να αναπτυχθεί στην σειρά:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}_i) \quad (3.29)$$

με θετικούς συντελεστές λ_i για κάθε i . Για να συγκλίνει αυτή η σειρά απόλυτα και ομοιόμορφα, πρέπει η συνθήκη:

$$\int_b^a \int_b^a K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}_i) d\mathbf{x} d\mathbf{x}_i \geq 0$$

να ικανοποιείται για όλες τις $\psi(\bullet)$ για τις οποίες $\int_b^a \psi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty$.

Το θεώρημα του Mercer προσδιορίζει αν ένας πυρήνας είναι εσωτερικό γινόμενο σε κάποιον χώρο και συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ένα SVM δίκτυο, αλλά δεν λέει τίποτα για τον χώρο αυτό, ούτε για τον τρόπο κατασκευής των ϕ_i .

3.9 Βέλτιστη σχεδίαση ενός SVM δικτύου

Μπορεί να διατυπωθεί το δυϊκό πρόβλημα για την βελτιστοποίηση ενός SVM δικτύου ως εξής:

Δοθέντος του συνόλου εκμάθησης $\{(x_i, d_i)\}_{i=1}^N$, να βρεθούν οι πολλαπλασιαστές Lagrange $\{a_i\}_{i=1}^N$ που μεγιστοποιούν την συνάρτηση:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^N a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j d_i d_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad (3.30)$$

με τους περιορισμούς (1) $\sum_{i=1}^N a_i d_i = 0$ και (2) $0 \leq a_i \leq C, i = 1, 2, \dots, N$, όπου C μια θετική παράμετρος που καθορίζεται από τον χρήστη.

Το πρόβλημα αυτό είναι ακριβώς το ίδιο όπως και στην περίπτωση των μη γραμμικά διαχωρίσιμων προβλημάτων, με μόνη διαφορά ότι το εσωτερικό

γινόμενο $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$ έχει αντικατασταθεί από τον πυρήνα $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$. Η βέλτιστη λύση για το διάνυσμα βάρους \mathbf{w} δίνεται από την σχέση (3.31):

$$\mathbf{w}_o = \sum_{i=1}^n a_{o,i} d_i \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) \quad (3.31)$$

Όσον αφορά το bias, αυτό είναι το πρώτο στοιχείο του διανύσματος \mathbf{w}_o .

3.10 Συνήθεις Πυρήνες

Η απαίτηση για έναν πυρήνα $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ είναι να ικανοποιεί το θεώρημα του Mercer. Γι' αυτό υπάρχει ελευθερία σχετικά με το πώς μπορεί να επιλεγθεί. Στον πίνακα 1 φαίνονται οι τρεις πιο συνηθισμένοι πυρήνες που χρησιμοποιούνται σε SVM δίκτυα:

Πίνακας 3.1: Οι πλέον συνηθισμένοι πυρήνες εσωτερικού γινομένου που χρησιμοποιούνται στις Support Vector Machines

<i>Τύπος του SVM δικτύου</i>	<i>Πυρήνας Εσωτερικού Γινομένου $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$</i>	<i>Παρατηρήσεις</i>
<i><u>Πολυωνυμική μηχανή μάθησης</u></i>	$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_i + 1)^p$	Η δύναμη p καθορίζεται εκ των προτέρων
<i><u>Δίκτυο Ακτινικών Συναρτήσεων Βάσης (RBF)</u></i>	$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ \mathbf{x} - \mathbf{x}_i\ ^2\right)$	Το πλάτος σ^2 είναι κοινό για όλους τους πυρήνες και καθορίζεται εκ των προτέρων
<i><u>Διεπίπεδο Perceptron</u></i>	$\tanh(\beta_0 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_i + \beta_1)$	Το θεώρημα του Mercer δεν ικανοποιείται για όλες τις τιμές των β_0 και β_1

3.11 Η VC διάσταση των SVM δικτύων

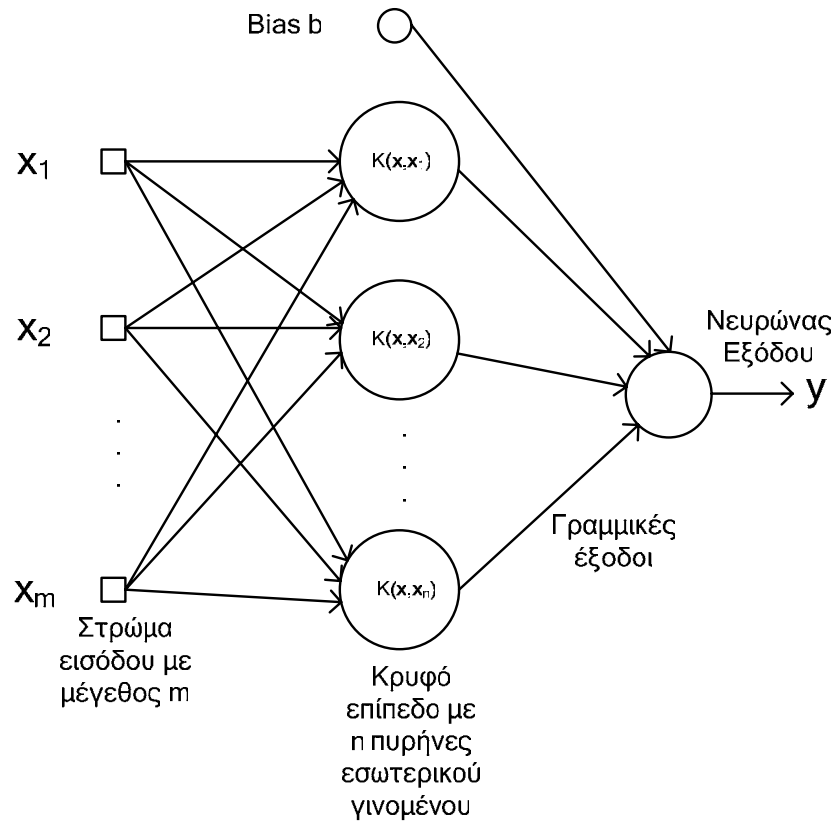
Αν και η VC διάσταση των SVM δικτύων είναι πολύ μεγάλη, έως και άπειρη, όπως θα δειχθεί παρακάτω, και θα περίμενε κανείς μικρή ικανότητα για γενίκευση, στην πράξη αυτό δεν συμβαίνει και τελικά τα SVM δίκτυα έχουν μεγάλη ικανότητα για γενίκευση. Η VC διάσταση ενός SVM δικτύου δίνεται από το παρακάτω θεώρημα:

«Αν K ένας πυρήνας που ικανοποιεί το θεώρημα του Mercer και H ο αντίστοιχος χώρος χαρακτηριστικών, τότε αν η διάσταση του H είναι d_H , η VC διάσταση του SVM δικτύου θα είναι $d_H + 1$ »

3.12 Η αρχιτεκτονική ενός SVM δικτύου

Η αρχιτεκτονική ενός SVM δικτύου φαίνεται στο σχήμα 3.4. Αποτελείται από δύο επίπεδα, ένα κρυφό και ένα φανερό. Το δίκτυο έχει m εισόδους, όση και η διάσταση του χώρου εισόδου. Το κρυφό επίπεδο αποτελείται από n νευρώνες, όση και η διάσταση του χώρου χαρακτηριστικών. Κάθε νευρώνας δέχεται το διάνυσμα εισόδου \mathbf{x} και πραγματοποιεί τον μη γραμμικό μετασχηματισμό $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$. Στο φανερό επίπεδο καταλήγουν όλοι οι νευρώνες του κρυφού επιπέδου, πολλαπλασιασμένοι με τα κατάλληλα βάρη που έχουν υπολογισθεί από τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης, αλλά και το bias b . Το επίπεδο αυτό αποτελείται από έναν νευρώνα, τον νευρώνα εξόδου, ο οποίος απλά στέλνει στην έξοδο το άθροισμα των μη γραμμικών μετασχηματισμών πολλαπλασιασμένων με τα βάρη και του b . Είναι φανερή η απλότητα που έχει το δίκτυο σε σχέση με άλλους τύπους Νευρωνικών Δικτύων, αφού ουσιαστικά μόνο το κρυφό επίπεδο εκτελεί όλους τους μετασχηματισμούς.

Επίσης το δεύτερο (φανερό) επίπεδο μπορεί να παρομοιαστεί με ένα perceptron και έτσι λειτουργεί στον χώρο χαρακτηριστικών.



Σχήμα 3.4: Αρχιτεκτονική ενός SVM δικτύου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΤΟ FUZZY SVM ΔΙΚΤΥΟ

4.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Ο σκοπός είναι η κατασκευή ενός δικτύου SVM, του οποίου ο πυρήνας θα αποτελείται από Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσης. Η αιτία της χρησιμοποίησης των έγκειται στην βασική ιδιότητα που έχουν τα Ασαφή Συστήματα να προσεγγίζουν οποιαδήποτε συνάρτηση, με οποιαδήποτε ακρίβεια. Έτσι, ένας πυρήνας από Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσης θα μπορεί να κατασκευάσει οποιοδήποτε υπερεπίπεδο για τον διαχωρισμό των προτύπων σε δυαδικά προβλήματα. Εκτός, όμως, από αυτό, με τον τρόπο αυτό θα μπορεί να γίνει εκπαίδευση του δικτύου με την χρησιμοποίηση ενός συνόλου γλωσσικών κανόνων.

4.2 Προσδιορισμός του Πυρήνα του Μετασχηματισμού

Έστω m η διάσταση του διανύσματος εισόδου του SVM δικτύου και n η διάσταση του χώρου χαρακτηριστικών, στον οποίο γίνεται ο μετασχηματισμός. Για τον προσδιορισμό του πυρήνα υπάρχουν δύο επιλογές:

- Απευθείας εύρεση του πυρήνα $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ του μετασχηματισμού, ο οποίος πρέπει να ικανοποιεί το θεώρημα του Mercer
- Προσδιορισμός της συνάρτησης $\phi(\mathbf{x})$ που κάνει την απεικόνιση ενός προτύπου από τον χώρο εισόδου στον χώρο χαρακτηριστικών

Ακολουθώντας τον δεύτερο τρόπο, ο πυρήνας θα προκύψει από την σχέση:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=0}^n \varphi_j(\mathbf{x}) \cdot \varphi_j(\mathbf{x}_i)$$

όπου \mathbf{x}_i είναι ένα από τα n διανύσματα στήριξης, και \mathbf{x} είναι ένα διάνυσμα εισόδου. Το σκεπτικό, με βάση το οποίο προκύπτει η $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ είναι το ακόλουθο:

- η συνάρτηση που δίνει την εξίσωση του βέλτιστου υπερεπιπέδου στον χώρο χαρακτηριστικών έχει την μορφή της σχέσης:

$$\sum_{j=0}^n w_j \phi_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.1)$$

- ένα ασαφές σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός από ασαφείς συναρτήσεις βάσης (FBF's) με την μορφή της σχέσης:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N B_i(\mathbf{x}) y_i \quad (4.2)$$

- Είναι εμφανής η ομοιότητα μεταξύ των δύο σχέσεων. Παρατηρούμε την αντιστοιχία μεταξύ της $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ και της $B_i(\mathbf{x})$.
- Εκ πρώτης όψεως φαίνεται να προκύπτει ένα πρόβλημα από την στιγμή που η $B_i(\mathbf{x})$ έχει την μορφή:

$$B_i(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{j=1}^k A_{i_j}^j(x_j)}{\sum_{i_1, \dots, i_k \in I} \prod_{j=1}^k A_{i_j}^j(x_j)}$$

αφού ο παρονομαστής δεν είναι συνάρτηση μόνο ενός διανύσματος, όπως η $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$, αλλά N διανυσμάτων. Όμως, συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις, προκύπτει:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N B_i(\mathbf{x})y_i = B_1(\mathbf{x})y_1 + B_2(\mathbf{x})y_2 + \dots + B_N(\mathbf{x})y_N = 0$$

και αφού κάθε συνάρτηση συμμετοχής $A_i(\underline{x})$ δίνεται από την σχέση:

$$A_i(\mathbf{x}) = A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n A_{ij}(x_j)$$

μπορούμε να γράψουμε την ισοδύναμη σχέση:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x})} (A_1(\mathbf{x})y_1 + A_2(\mathbf{x})y_2 + \dots + A_N(\mathbf{x})y_N) = 0$$

και απλοποιώντας το κλάσμα, προκύπτει η ισοδύναμη σχέση:

$$A_1(\mathbf{x})y_1 + A_2(\mathbf{x})y_2 + \dots + A_N(\mathbf{x})y_N = 0$$

η οποία σε συνεπτυγμένη μορφή μπορεί να γραφεί και ως:

$$\sum_{i=1}^N A_i(\mathbf{x})y_i = 0$$

4.2.1 Ομαδοποίηση του χώρου

Είναι προφανής η «ισοδυναμία» μεταξύ των σχέσεων (4.1) και (4.2) και γίνεται κατανοητό ότι οι Ασαφείς Συναρτήσεις Βάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις που θα εκτελούν τον μετασχηματισμό από τον χώρο εισόδου στον χώρο χαρακτηριστικών.

Προκειμένου να χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα των ασαφών συστημάτων σαν παγκόσμιοι προσεγγιστές, πρέπει τα διανύσματα στήριξης να κάνουν τέτοια ομαδοποίηση στον χώρο έτσι ώστε τα ασαφή σύνολα που ορίζονται να είναι κανονικά, συνεπή και πλήρη με ψευδοτραπεζοειδείς (PTS) συναρτήσεις συμμετοχής.

Κάθε συνιστώσα του διανύσματος εισόδου ανήκει σε ένα ασαφές σύνολο A_i^j ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$), όπου n είναι ο αριθμός των διανυσμάτων στήριξης. Κάθε ασαφές σύνολο A_i^j , έχει συνάρτηση συμμετοχής $A_i^j(x_j)$ η

οποία και είναι τριγωνική. Τα «κέντρα» των συναρτήσεων αυτών (για την ακρίβεια τα σημεία όπου $A_i^j(x_j)=1$), είναι τα σημεία που αντιστοιχούν στις συνιστώσες των διανυσμάτων στήριξης. Το εύρος των τριγωνικών δεν είναι προκαθορισμένο, αλλά καθορίζεται και αυτό από τα διανύσματα στήριξης. Έτσι, αν έχουμε τρία διανύσματα στήριξης που οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι συνεχόμενες, η συνάρτηση συμμετοχής που ως κέντρο θα έχει το μεσαίο, θα έχει ως άκρα τις συνιστώσες των άλλων δύο. Ο λόγος που επιλέγεται αυτός ο τρόπος αναπαράστασης είναι η ανάγκη να είναι συνεπή και πλήρη τα ασαφή σύνολα του χώρου.

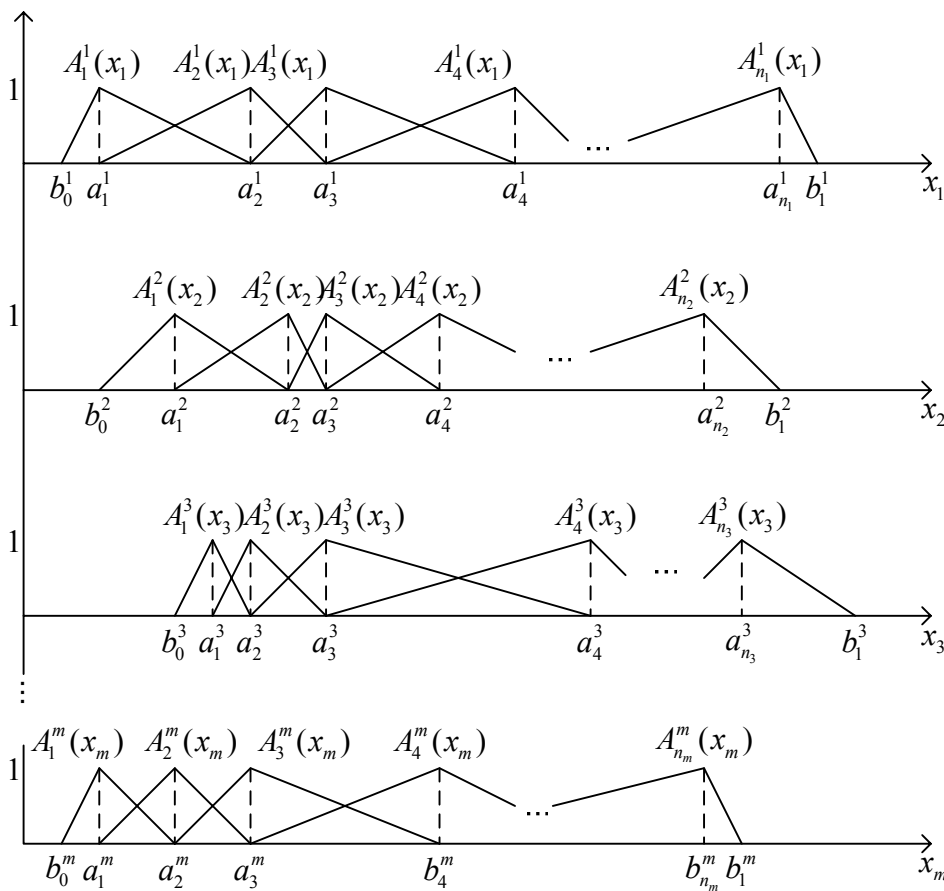
Πρέπει, επίσης να καταστεί σαφές ότι οι συνιστώσες των διανυσμάτων του συνόλου εκμάθησης, δεν διατάσσονται με την ίδια σειρά κατ'ανάγκη. Δηλαδή οι κορυφές των ασαφών υποσυνόλων A_{k2}^{k1} και A_{k2}^{k3} δεν είναι απαραίτητα συνιστώσες του ίδιου διανύσματος στήριξης. Ακόμη, κάποιες από αυτές μπορεί να ταυτίζονται. Στην πιο ακραία περίπτωση, όπου δεν υπάρχουν δύο διανύσματα στήριξης που να έχουν ίσες κάποιες αντίστοιχες συντεταγμένες, κάθε χώρος μπορεί να έχει ομαδοποίηση από n σημεία.

Η κατασκευή των Ασαφών Συναρτήσεων Συμμετοχής γίνεται ως εξής: Σε ένα σύνολο εκμάθησης εφαρμόζεται ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης με την χρήση της μεθόδου των Πολλαπλασιαστών Lagrange. Κάθε μη μηδενικός πολλαπλασιαστής Lagrange αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα στήριξης x_i . Το τυχαίο ασαφές σύνολο $A_i^j(x_j)$ θα έχει τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής που περιγράφεται από την σχέση:

$$A_i^j(x_j) = \Delta(a_{i-1}^j, a_i^j, a_{i+1}^j) \quad (4.3)$$

Έτσι κατασκευάζονται όλες οι συναρτήσεις συμμετοχής χρησιμοποιώντας και τα n διανύσματα στήριξης. Από αυτές προκύπτουν οι ασαφείς συναρτήσεις βάσης (FBFs) που θα χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή του πυρήνα του μετασχηματισμού.

Στο σχήμα 4.1 φαίνεται η ομαδοποίηση του χώρου, καθώς και οι ασαφείς συναρτήσεις βάσης.



Σχήμα 4.1 Ομαδοποίηση του Χώρου Εισόδου και Κατασκευή των Ασαφών Συναρτήσεων Συμμετοχής από τα Διανύσματα Στήριξης

Κάθε διάνυσμα στήριξης $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ έχει διάσταση m . Κάθε μία από τις m συνιστώσες έχει πεδίο ορισμού $[b_0^j, b_1^j]$, $j = 1, 2, \dots, m$. Επειδή κάποιες από τις συνιστώσες των διανυσματων στήριξης μπορεί να ταυτίζονται, η ομαδοποίηση σε κάθε χώρο δεν είναι σίγουρο ότι θα γίνεται από n σημεία, αλλά έστω ότι γίνεται από $n_j, j = 1, 2, \dots, m$ σημεία. Ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ένα σύνολο από σημεία $a_{ij}^j, i_j = 1, 2, \dots, n_j | j = 1, 2, \dots, m$, τα οποία ομαδοποιούν τον χώρο m διαστάσεων. Για τον λόγο που αναφέραμε παραπάνω, οι δείκτες j δεν αντιστοιχούν στο \mathbf{x}_j διάνυσμα στήριξης, αλλά χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουν αύξουσα σειρά προκειμένου να διευκολύνεται η παρουσίαση.

4.2.2 Προσδιορισμός των $\varphi(\mathbf{x})$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η συνάρτηση συμμετοχής ενός ασαφούς συνόλου $A_{i_1 i_2 \dots i_n} = A_{i_1}^1 \times A_{i_2}^2 \times \dots \times A_{i_n}^n$ με $i_1 i_2 \dots i_n \in I$ και $I = \{i_1 i_2 \dots i_n \mid i_j = 1, 2, \dots, N_j; j = 1, 2, \dots, n\}$, θα είναι:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n}(\mathbf{x}) = \min\{A_{i_1}^1(x_1), A_{i_2}^2(x_2), \dots, A_{i_n}^n(x_n)\}$$

αν χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή \min και $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ένα διάνυσμα εισόδου.

Προσαρμόζοντας τις σχέσεις αυτές στην περίπτωση όπου η διάσταση του διανύσματος εισόδου είναι m και ο αριθμός των διανυσμάτων στήριξης και άρα και των ασαφών συναρτήσεων συμμετοχής είναι n , καταλήγουμε ότι η συνάρτηση συμμετοχής ενός ασαφούς συνόλου $A_{i_1 i_2 \dots i_m} = A_{i_1}^1 \times A_{i_2}^2 \times \dots \times A_{i_m}^m$ με $i_1 i_2 \dots i_m \in I$ και $I = \{i_1 i_2 \dots i_m \mid i_j = 1, 2, \dots, n\}$ θα είναι:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_m}(\mathbf{x}) = \min\{A_{i_1}^1(x_1), A_{i_2}^2(x_2), \dots, A_{i_m}^m(x_m)\} \quad (4.4)$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί ο τελεστής γινομένου (product operator), η συνάρτηση συμμετοχής ενός ασαφούς συνόλου $A_{i_1 i_2 \dots i_n} = A_{i_1}^1 \times A_{i_2}^2 \times \dots \times A_{i_n}^n$ με $i_1 i_2 \dots i_n \in I$ και $I = \{i_1 i_2 \dots i_n \mid i_j = 1, 2, \dots, N_j; j = 1, 2, \dots, n\}$, θα είναι:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n}(\mathbf{x}) = A_{i_1}^1(x_1) \cdot A_{i_2}^2(x_2) \cdot \dots \cdot A_{i_n}^n(x_n) \quad (4.5)$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ένα διάνυσμα εισόδου. Αν προσαρμοστεί η σχέση αυτή στην περίπτωση του συστήματος που έχει περιγραφεί, προκύπτει:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_m}(\mathbf{x}) = A_{i_1}^1(x_1) \cdot A_{i_2}^2(x_2) \cdot \dots \cdot A_{i_m}^m(x_m) \quad (4.6)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι μόνο αυτές οι συναρτήσεις συμμετοχής που ορίζονται από τα διανύσματα στήριξης χρησιμοποιούνται στην κατασκευή του πυρήνα.

Στην συνέχεια θα περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίο θα προσδιορισθεί η συνάρτηση $\varphi(\mathbf{x})$, αν για τον σχηματισμό του Ασαφούς Συστήματος

χρησιμοποιηθεί ο τελεστής γινομένου και τα ασαφή σύνολα έχουν τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής:

Κάθε τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής, που έχει κατασκευαστεί με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως, έχει την γενική μορφή:

$$\Delta(x; a, b, d) = \begin{cases} I(x), x \in [a, b) \\ 1, x = b \\ D(x), x \in (b, d] \\ 0, x \in U - [a, d] \end{cases}$$

όπου $U \subset \mathbb{R}$ είναι ο χώρος εισόδου και $I(x) = \frac{x-a}{b-a}$, $D(x) = \frac{x-d}{b-d}$ και αποτελεί

μια ειδική περίπτωση της τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής με $b=c$.

Στην ιδεατή περίπτωση που έχουμε περιγράψει, με αντικατάσταση των a, b, d

με τις συντεταγμένες των διανυσμάτων στήριξης, όπως αναφέρθηκε πιο πριν,

στην γενική περίπτωση που $a_{i_j}^j$ είναι το κέντρο μιας τέτοιας συνάρτησης, που

αντιστοιχεί στο a της παραπάνω σχέσης, η συνάρτηση $A_{i_j}^j$ θα δίνεται από την

σχέση:

$$A_{i_j}^j(x; a_{i_{j-1}}^j, a_{i_j}^j, a_{i_{j+1}}^j) = \begin{cases} \frac{x - a_{i_{j-1}}^j}{a_{i_j}^j - a_{i_{j-1}}^j}, x \in [a_{i_{j-1}}^j, a_{i_j}^j) \\ 1, x = a_{i_j}^j \\ \frac{x - a_{i_{j+1}}^j}{a_{i_j}^j - a_{i_{j+1}}^j}, x \in (a_{i_j}^j, a_{i_{j+1}}^j] \\ 0, x \in U - [a_{i_{j-1}}^j, a_{i_{j+1}}^j] \end{cases}$$

όπου προφανώς θα ισχύει $i_1 i_2 \dots i_m \in I$ και $I = \{i_1 i_2 \dots i_m \mid i_j = 1, 2, \dots, n\}$.

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή γινομένου, η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου $A_{i_1 i_2 \dots i_m}(\mathbf{x})$ θα δίνεται από την σχέση (4.6). Με δεδομένο ότι

ενδιαφέρουν μόνο αυτές οι συναρτήσεις που ορίζονται από τα διανύσματα

στήριξης, είναι απαραίτητο να οριστεί το σύνολο δεικτών που ικανοποιεί την

παραπάνω προϋπόθεση, προκειμένου να επιλεγθεί το σωστό σύνολο των

ασαφών συναρτήσεων συμμετοχής.

Ορίζοντας μια αντιστοιχία ανάμεσα σε ένα διάνυσμα στήριξης και τις ασαφείς συναρτήσεις $A_{i_j}^j$ που του «αντιστοιχούν» (για την ακρίβεια, αυτές που δημιουργούνται με κέντρα τις συνιστώσες του), τότε προκύπτει η παρακάτω σχέση για την περιγραφή του ζητούμενου σύνολου δεικτών I' :

$$I' = \{i_1 i_2 \dots i_m \mid i_j = 1, 2, \dots, n \mid (b_{i_1}^1, b_{i_2}^2, \dots, b_{i_m}^m) \in X_S\} \quad (4.7)$$

όπου $X_S = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ το σύνολο των support vectors και προφανώς $I' \subset I$.

Με βάση αυτό το σύνολο δεικτών, η σχέση που μας δίνει τις ασαφείς συναρτήσεις συμμετοχής είναι η ακόλουθη:

$$B_{i_1 i_2 \dots i_m}(\mathbf{x}) = \frac{A_{i_1 i_2 \dots i_m}(\mathbf{x})}{\sum_{i_1 i_2 \dots i_m \in I'} A_{i_1 i_2 \dots i_m}(\mathbf{x})} = \frac{A_{i_1}^1(x_1) \cdot A_{i_2}^2(x_2) \cdot \dots \cdot A_{i_m}^m(x_m)}{\sum_{i_1 i_2 \dots i_m \in I'} A_{i_1}^1(x_1) \cdot A_{i_2}^2(x_2) \cdot \dots \cdot A_{i_m}^m(x_m)} = \frac{\prod_{j=1}^m A_{i_j}^j(x_j)}{\sum_{i_1 i_2 \dots i_m \in I'} \prod_{j=1}^m A_{i_j}^j(x_j)} \quad (4.8)$$

Από τον ορισμό των συναρτήσεων αυτών, είναι φανερό ότι υπάρχουν n τέτοιες συναρτήσεις, όσα είναι και τα διανύσματα στήριξης. Δηλαδή το σύνολο δεικτών I' έχει n στοιχεία. Η συνάρτηση $A_{i_1 i_2 \dots i_m}(\mathbf{x})$ της σχέσης (4.8) αποτελεί μια συνιστώσα της $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$, η οποία υπενθυμίζεται ότι είναι της μορφής:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [\phi_0(\mathbf{x}) \phi_1(\mathbf{x}) \dots \phi_n(\mathbf{x})]^T \quad (4.9)$$

Μπορεί πλέον να προκύψει η σχέση που αντιστοιχεί τις συναρτήσεις $A_{i_1 i_2 \dots i_m}(\mathbf{x})$ με τις $\phi_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, n$. Είναι φανερή η ισοδυναμία μεταξύ $A_{i_1 i_2 \dots i_m}(\mathbf{x})$ και $\phi_i(\mathbf{x})$. Στην σχέση (4.7) ορίστηκε το σύνολο δεδομένων I' το οποίο καθορίζει τις ζητούμενες συναρτήσεις $A_{i_1 i_2 \dots i_m}(\mathbf{x})$ από αυτές που μπορούν να σχηματιστούν αν το σύνολο δεδομένων είναι το I . Κατ'αντιστοιχία με αυτόν τον ορισμό, ορίζουμε:

$$\phi_i(\mathbf{x}) = A_i(\mathbf{x}) \equiv A_{i_1 i_2 \dots i_m}(\mathbf{x}), i_1 i_2 \dots i_m \mid i_j = 1, 2, \dots, m \mid (b_{i_1}^1, b_{i_2}^2, \dots, b_{i_m}^m) \equiv \mathbf{x}_i \quad (4.10)$$

όπου \mathbf{x}_i είναι ένα από τα n διανύσματα στήριξης. Πλέον, η σχέση (4.9) μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [A_0(\mathbf{x}) A_1(\mathbf{x}) \dots A_n(\mathbf{x})]^T \quad (4.11)$$

όπου και θα ισχύει $A_0(\mathbf{x})=1$ για όλα τα \mathbf{x} . Με βάση την (4.9), η (3.27), η οποία παρατίθεται ξανά για ευκολία στην ανάγνωση:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=0}^n \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{x}_i)$$

μπορεί να γίνει:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \sum_{j=0}^n A_j(\mathbf{x}) \cdot A_j(\mathbf{x}_i) \quad (4.12)$$

όπου οι συναρτήσεις $A_j(\mathbf{x})$ κατασκευάζονται όπως έχει περιγραφεί προηγουμένως και προκύπτει η τελική σχέση για τον πυρήνα:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m \Delta^j(x_{i-1}^j, x_i^j, x_{i+1}^j) \cdot \Delta^j(x_{i-1}^j, x_i^j, x_{i+1}^j) \quad (4.13)$$

όπου ένα διάνυσμα \mathbf{x}_i ορίζεται ως $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m)$, $i=1, 2, \dots, n$ και $x_0^j = x_1^j$ και $x_n^j = x_{n+1}^j$, σε περίπτωση που δεν ξέρουμε το πεδίο ορισμού της μεταβλητής x_i . Στην περίπτωση που $x_i \in [b_{0i}, b_{1i}]$, μπορούν κατ'επιλογή να ισχύουν και οι σχέσεις $x_0^j = b_{0i}$ και $x_{n+1}^j = b_{1i}$.

4.2.3 Προσδιορισμός των Διανυσμάτων Στήριξης

Στο δεύτερο κεφάλαιο έγινε περιγραφή του τρόπου με τον οποίο γίνεται ο προσδιορισμός των support vectors. Τα διανύσματα αυτά καθορίζονται, όπως έχει αναφερθεί, κάθε φορά από το συγκεκριμένο σύνολο εκμάθησης και εξαρτώνται στενά από τον πυρήνα που χρησιμοποιείται. Η μέθοδος έχει σε γενικές γραμμές περιγραφεί. Στην συνέχεια θα αναπτυχθεί λεπτομερέστερα.

Η συνάρτηση κόστους που πρέπει να μεγιστοποιηθεί, έχει δοθεί στην σχέση (3.13) και παρατίθεται εδώ για ευκολία:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^N a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j d_i d_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad (4.14)$$

με τους περιορισμούς (1) $\sum_{i=1}^N a_i d_i = 0$ και (2) $0 \leq a_i \leq C, i=1,2,\dots,N$, όπου C μια θετική παράμετρος που καθορίζεται από τον χρήστη, $\{(\mathbf{x}_i, d_i)\}_{i=1}^N$ το σύνολο εκμάθησης, και $\{a_i\}_{i=1}^N$ οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Η σχέση (4.14) μπορεί να ξαναγραφεί, αντικαθιστώντας τον πυρήνα με το ισοδύναμο εσωτερικό γινόμενο:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^N a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j d_i d_j \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j) \quad (4.15)$$

Το εσωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j)$ μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j) = \phi_0(\mathbf{x}_i) \phi_0(\mathbf{x}_j) + \phi_1(\mathbf{x}_i) \phi_1(\mathbf{x}_j) + \dots + \phi_N(\mathbf{x}_i) \phi_N(\mathbf{x}_j) = \sum_{k=1}^N \phi_k(\mathbf{x}_i) \phi_k(\mathbf{x}_j)$$

και συνεπώς, με αντικατάσταση στην σχέση (4.14) προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^N a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j d_i d_j \sum_{k=1}^N \phi_k(\mathbf{x}_i) \phi_k(\mathbf{x}_j) \quad (4.16)$$

Και αντικαθιστώντας την συνάρτηση $\phi_k(\mathbf{x})$ με την $A_k(\mathbf{x})$, η συνάρτηση κόστους παίρνει την εξής (τελική) μορφή:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^N a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j d_i d_j \sum_{k=1}^N A_k(\mathbf{x}_i) A_k(\mathbf{x}_j) \quad (4.17)$$

Φαίνεται ότι στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης συμμετέχουν όλα τα διανύσματα του συνόλου εκμάθησης και το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ένα σύνολο από μη μηδενικούς πολλαπλασιαστές Lagrange $\{a_i\}_{i=1}^n$, το οποίο αποτελεί ένα υποσύνολο του $\{a_i\}_{i=1}^N$. Κάθε ένας από τους n πολλαπλασιαστές Lagrange, αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα στήριξης. Αυτό σημαίνει ότι αν π.χ. ο πολλαπλασιαστής a_i είναι διάφορος του μηδενός, τότε το \mathbf{x}_i θα είναι ένα διάνυσμα στήριξης.

Η ποσότητα $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν το ij -στό στοιχείο ενός συμμετρικού $N \times N$ πίνακα \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \{K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)\}_{(i,j)=1}^N \quad (4.18)$$

4.2.4 Έλεγχος Ικανοποίησης του Κριτηρίου Mercer

Πρέπει ο πυρήνας $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ να ικανοποιεί το θεώρημα του Mercer, το οποίο έχει περιγραφεί στο 2^ο κεφάλαιο. Όταν αυτό συμβαίνει, ο πυρήνας μπορεί να αναλυθεί στην σειρά με θετικούς συντελεστές που περιγράφει η σχέση:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}_i)$$

Ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάστηκε ο πυρήνας που θα χρησιμοποιηθεί εξασφαλίζει εκ των προτέρων και την αντιμεταθετικότητα του πυρήνα και την ανάλυσή του σε σειρά. Αυτό, μπορούμε να αποδειχθεί, αν ισχύει η σχέση:

$$\int_a^b \int_a^b K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \geq 0$$

όπως έχει ήδη περιγραφεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Είναι:

$$\int_a^b \int_a^b K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' = \int_a^b \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n A_i(\mathbf{x}) \cdot A_i(\mathbf{x}') \right] \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^n I_j = I$$

$$\text{όπου } I_j = \int_a^b \int_a^b A_j(\mathbf{x}) A_j(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' = \int_a^b \int_a^b A_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} A_j(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' =$$

$$= \left[\int_a^b A_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \cdot \left[\int_a^b A_j(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right] = \left[\int_a^b A_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right]^2 \geq 0$$

άρα και $I = \int_a^b \int_a^b K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \geq 0$ ως άθροισμα μη αρνητικών

ποσοτήτων.

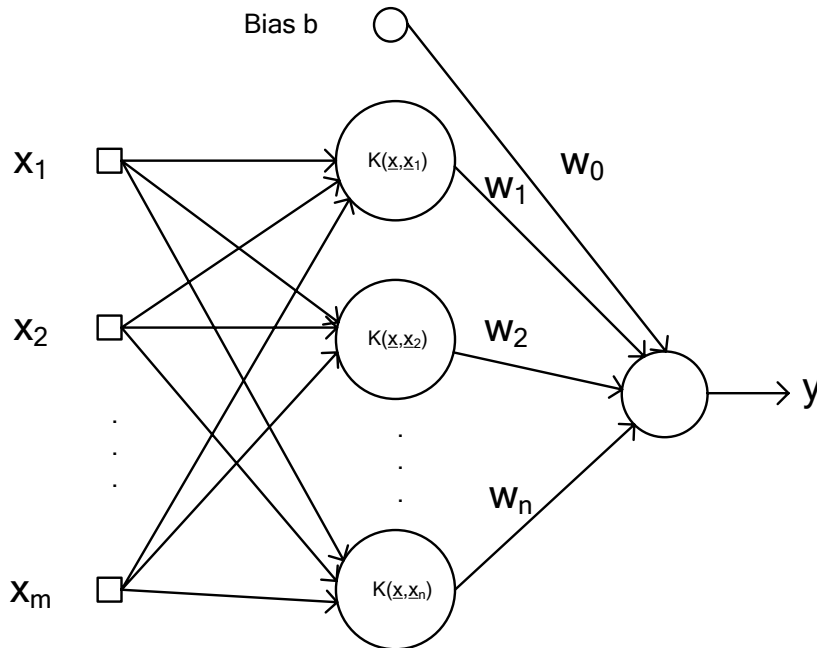
Συνεπώς, φαίνεται ότι το θεώρημα του Mercer ικανοποιείται από την συνάρτηση που έχει επιλεγεί για πυρήνας, αλλά και από κάθε συνάρτηση η οποία μπορεί να γραφεί με την μορφή εσωτερικού γινομένου.

4.3 Μάθηση – Κατασκευή του Δικτύου

Αν $\{a_{o,i}\}_{i=1}^n$ το σύνολο των βέλτιστων τιμών των πολλαπλασιαστών Lagrange που προέκυψαν από την εφαρμογή του αλγόριθμου βελτιστοποίησης, η βέλτιστη τιμή του διανύσματος των βαρών \mathbf{w}_o προκύπτει από την σχέση:

$$\mathbf{w}_o = \sum_{i=1}^n a_{o,i} d_i \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) \quad (4.19)$$

όπου έχουν μείνει μόνο n διανύσματα. Αυτά είναι προφανώς τα διανύσματα στήριξης που καθορίζουν και την διάσταση του χώρου χαρακτηριστικών. Με την χρήση της σχέσης (4.19), κατασκευάζεται το βέλτιστο υπερεπίπεδο διαχωρισμού, αλλά και το SVM δίκτυο. Πρέπει να σημειωθεί ότι μόνο τα διανύσματα στήριξης καθορίζουν το υπερεπίπεδο αυτό και τυχόν απομάκρυνσή των υπολοίπων διανυσμάτων και εκπαίδευση του δικτύου από την αρχή οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα. Η μορφή που παίρνει το SVM δίκτυο θα είναι:



Σχήμα 4.3: Μορφή του SVM δικτύου

Όπως έχει αναφερθεί, το δίκτυο μπορεί να εκπαιδευθεί και από ένα σύνολο ασαφών κανόνων της μορφής:

ΚΑΝΟΝΑΣ 1:

ΑΝ x_1 είναι A_1^1 και x_2 είναι A_1^2 και ... και x_m είναι A_1^m ΤΟΤΕ y είναι B_1

ΚΑΝΟΝΑΣ 2:

ΑΝ x_1 είναι A_2^1 και x_2 είναι A_2^2 και ... και x_m είναι A_2^m ΤΟΤΕ y είναι B_2

.....
ΚΑΝΟΝΑΣ n:

ΑΝ x_1 είναι A_n^1 και x_2 είναι A_n^2 και ... και x_m είναι A_n^m ΤΟΤΕ y είναι B_n

Αυτό που πρέπει να παρατηρηθεί είναι ότι κάθε νευρώνας στο κρυφό επίπεδο σχετίζεται με το αποτέλεσμα ενός ασαφούς κανόνα AN-TOTE. Ένα τέτοιο σύνολο κανόνων αρκεί για την εκπαίδευση ενός δικτύου και αυτό είναι πολύ σημαντικό αφού σημαίνει ότι το Ασαφές SVM δίκτυο μπορεί να χρησιμοποιήσει ήδη υπάρχουσα γνώση. Η κατασκευή του δικτύου είναι στην περίπτωση αυτή πολύ απλή, αφού για όσους κανόνες είναι διαθέσιμοι, φτιάχνονται τόσοι νευρώνες στο κρυφό επίπεδο.

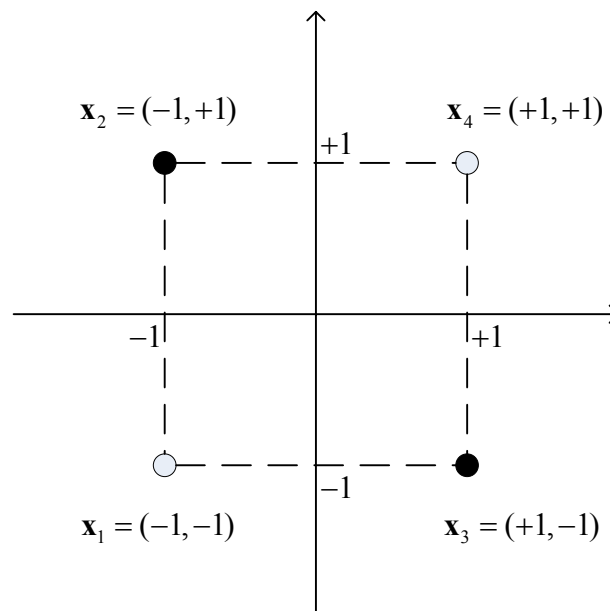
4.4 Το XOR πρόβλημα

Ένα πολύ απλό μη γραμμικά διαχωρίσιμο πρόβλημα είναι το “Exclusive OR” (XOR) πρόβλημα. Αποτελείται από τέσσερα διανύσματα στον χώρο δύο διαστάσεων $x_i, i=1,2,3,4$ και τις αντίστοιχες αποκρίσεις τους $d_i, i=1,2,3,4$, που φαίνονται στον πίνακα 4.1:

Πίνακας 4.1: XOR πρόβλημα

i	Διάνυσμα εισόδου \mathbf{x}_i	Απόκριση d_i
1	$(-1,-1)$	-1
2	$(-1,+1)$	+1
3	$(+1,-1)$	-1
4	$(+1,+1)$	+1

Η εικόνα του προβλήματος στον χώρο των δύο διαστάσεων είναι αυτή του σχήματος 4.3.

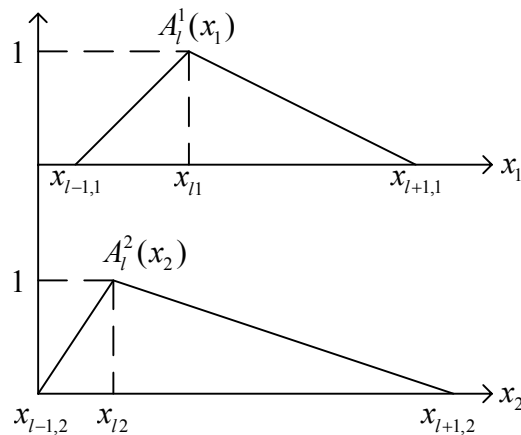
**Σχήμα 4.3 :** XOR πρόβλημα

Είναι προφανές ότι δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ένα επίπεδο που να διαχωρίζει τα διανύσματα \mathbf{x}_1 και \mathbf{x}_4 από τα \mathbf{x}_2 και \mathbf{x}_3 . Συνεπώς το πρόβλημα δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμο. Στην συνέχεια θα εξεταστεί αν το ασαφές SVM δίκτυο που έχει περιγραφεί, είναι ικανό να επιλύσει το πρόβλημα αυτό.

Το σύνολο εκμάθησης είναι προφανώς το $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^4$ και το σύνολο των αποκρίσεων των διανυσμάτων αυτών είναι το $\{d_i\}_{i=1}^4$. Η συνάρτηση κόστους που πρέπει να μεγιστοποιηθεί είναι αυτή της σχέσης (4.17) για $N=4$:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^4 a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_i a_j d_i d_j \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_i) A_k(\mathbf{x}_j)$$

Αρχικά, περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζεται η ποσότητα $\sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_i) A_k(\mathbf{x}_j)$, η οποία είναι στην ουσία η ποσότητα $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. Έστω το διάνυσμα \mathbf{x}_l και x_{l1}, x_{l2} οι συνιστώσες του, αφού το πρόβλημα είναι ορισμένο σε χώρο δύο διαστάσεων. Έστω τα διανύσματα $\mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_{l+1}$ και οι αντίστοιχες συνιστώσες τους: $x_{l-1,1}, x_{l-1,2}, x_{l+1,1}, x_{l+1,2}$. Οι τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής που ορίζονται στην περίπτωση αυτή, φαίνονται στο σχήμα 5.5.



Σχήμα 4.4 : Ομαδοποίηση από διανύσματα δύο διαστάσεων

Από αυτές τις δύο συναρτήσεις συμμετοχής, κατασκευάζεται η $A_l(\mathbf{x})$ από την σχέση: $A_l(\mathbf{x}) = A_l^1(x_1) \cdot A_l^2(x_2)$. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να υπολογιστεί με βάση τις σχέσεις (4.10). Οι $A_l^1(x_1)$ και $A_l^2(x_2)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$A_l^1(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1 - x_{l-1,1}}{x_{l1} - x_{l-1,1}}, x_1 \in [x_{l-1,1}, x_{l1}) \\ 1, x_2 = x_{l1} \\ \frac{x_1 - x_{l+1,1}}{x_{l1} - x_{l+1,1}}, x_1 \in (x_{l1}, x_{l+1,1}] \\ 0, x_1 \in U_1 - [x_{l-1,1}, x_{l+1,1}] \end{cases}$$

$$A_l^2(x_2) = \begin{cases} \frac{x_2 - x_{l-1,2}}{x_{l2} - x_{l-1,2}}, x_2 \in [x_{l-1,2}, x_{l2}) \\ 1, x_2 = x_{l2} \\ \frac{x_2 - x_{l+1,2}}{x_{l2} - x_{l+1,2}}, x_2 \in (x_{l2}, x_{l+1,2}] \\ 0, x_2 \in U_2 - [x_{l-1,2}, x_{l+1,2}] \end{cases}$$

όπου U_1, U_2 τα πεδία ορισμού των $A_l^1(x_1)$ και $A_l^2(x_2)$. Θεωρώντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, την διάταξη των συντεταγμένων των τριών διανυσμάτων όπως φαίνεται στο σχήμα 5.5, η $A_l(\mathbf{x})$ θα είναι:

$$A_l(\mathbf{x}) = A_l(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 - x_{l-1,1}}{x_{l1} - x_{l-1,1}} \cdot \frac{x_2 - x_{l-1,2}}{x_{l2} - x_{l-1,2}}, x_1, x_2 \in [x_{l-1,1}, x_{l2}) \\ \frac{x_1 - x_{l-1,1}}{x_{l1} - x_{l-1,1}} \cdot \frac{x_2 - x_{l+1,2}}{x_{l2} - x_{l+1,2}}, x_1, x_2 \in [x_{l2}, x_{l1}) \\ \frac{x_1 - x_{l+1,1}}{x_{l1} - x_{l+1,1}} \cdot \frac{x_2 - x_{l+1,2}}{x_{l2} - x_{l+1,2}}, x_1, x_2 \in [x_{l1}, x_{l+1,1}] \\ 0, x_1, x_2 \in U - [x_{l-1,1}, x_{l+1,1}] \end{cases}$$

Οι τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής για τα διανύσματα του training set του XOR προβλήματος, θεωρώντας πεδίο ορισμού το $[-1, +1]$ σε κάθε περίπτωση είναι αυτές του σχήματος 4.5.

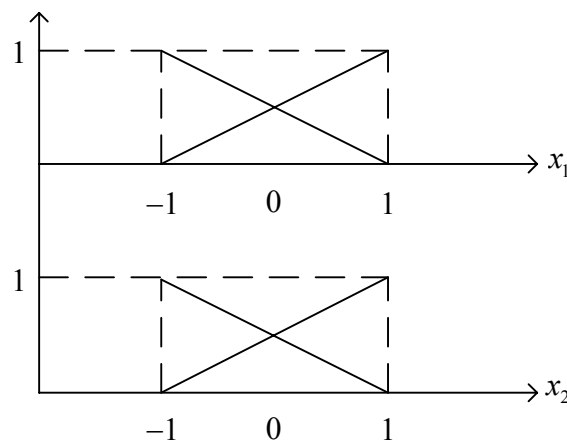
Η μορφή του συνόλου εκμάθησης στην περίπτωση αυτή οδηγεί σε τέσσερις μόνο τριγωνικές συναρτήσεις, κάθε μία από τις οποίες «ανήκει» σε δύο διανύσματα. Υπάρχουν συνολικά τέσσερις συναρτήσεις $A_i(\mathbf{x}), i=1,2,3,4$. Αυτές προκύπτουν με βάση το σχήμα 5.6 και με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως. Έτσι, θα είναι:

$$A_1(\mathbf{x}) = A_1(x_1, x_2) = \frac{1-x_1}{2} \cdot \frac{1-x_2}{2} = \frac{1}{4}(1-x_1-x_2+x_1x_2)$$

$$A_2(\mathbf{x}) = A_2(x_1, x_2) = \frac{1-x_1}{2} \cdot \frac{1+x_2}{2} = \frac{1}{4}(1-x_1+x_2-x_1x_2)$$

$$A_3(\mathbf{x}) = A_3(x_1, x_2) = \frac{1+x_1}{2} \cdot \frac{1-x_2}{2} = \frac{1}{4}(1+x_1-x_2-x_1x_2)$$

$$A_4(\mathbf{x}) = A_4(x_1, x_2) = \frac{1+x_1}{2} \cdot \frac{1+x_2}{2} = \frac{1}{4}(1+x_1+x_2+x_1x_2)$$



Σχήμα 4.5: Ομαδοποίηση από τις τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής για το XOR πρόβλημα

Ισχύουν οι σχέσεις: $A_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$

Η συνάρτηση κόστους στην περίπτωση του training set 4 διανυσμάτων γίνεται:

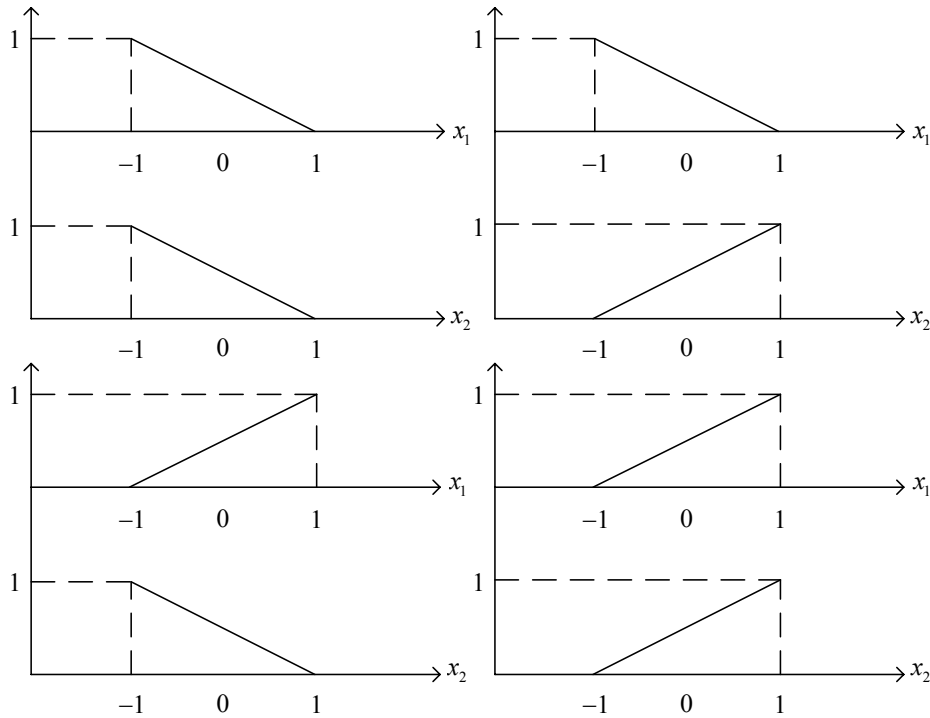
$$Q(a) = \sum_{i=1}^4 a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_i a_j d_i d_j \sum_{k=1}^4 A_k(\underline{x}_i) A_k(\underline{x}_j)$$

και κάνοντας τις πράξεις, προκύπτει:

$$Q(a) = Q(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \frac{1}{2} \cdot \left[a_1^2 d_1^2 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_1) A_k(\mathbf{x}_1) + a_1 a_2 d_1 d_2 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_1) A_k(\mathbf{x}_2) + a_1 a_3 d_1 d_3 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_1) A_k(\mathbf{x}_3) + a_1 a_4 d_1 d_4 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_1) A_k(\mathbf{x}_4) + a_2 a_1 d_2 d_1 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_2) A_k(\mathbf{x}_1) + a_2^2 d_2^2 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_2) A_k(\mathbf{x}_2) + a_2 a_3 d_2 d_3 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_2) A_k(\mathbf{x}_3) + a_2 a_4 d_2 d_4 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_2) A_k(\mathbf{x}_4) + a_3 a_1 d_3 d_1 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_3) A_k(\mathbf{x}_1) + a_3 a_2 d_3 d_2 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_3) A_k(\mathbf{x}_2) + a_3^2 d_3^2 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_3) A_k(\mathbf{x}_3) + a_3 a_4 d_3 d_4 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_3) A_k(\mathbf{x}_4) + a_4 a_1 d_4 d_1 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_4) A_k(\mathbf{x}_1) + a_4 a_2 d_4 d_2 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_4) A_k(\mathbf{x}_2) + a_4 a_3 d_4 d_3 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_4) A_k(\mathbf{x}_3) + a_4^2 d_4^2 \sum_{k=1}^4 A_k(\mathbf{x}_4) A_k(\mathbf{x}_4) \right]$$

Από την σχέση αυτή, αντικαθιστώντας με βάση αυτά που αναφέρθηκαν προηγουμένως, προκύπτει η:

$$Q(a) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \frac{1}{2} [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2] = a_1 - \frac{1}{2} a_1^2 + a_2 - \frac{1}{2} a_2^2 + a_3 - \frac{1}{2} a_3^2 + a_4 - \frac{1}{2} a_4^2$$



Σχήμα 4.6: Ομαδοποίηση από κάθε ένα από τα τέσσερα διανύσματα του συνόλου εκμάθησης για το XOR πρόβλημα

και είναι $\frac{\partial Q}{\partial a_1} = 1 - a_1 = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial a_2} = 1 - a_2$, $\frac{\partial Q}{\partial a_3} = 1 - a_3$, $\frac{\partial Q}{\partial a_4} = 1 - a_4 = 0$, άρα

προκύπτουν οι ακόλουθες βέλτιστες τιμές για τους πολλαπλασιαστές Lagrange: $a_{o,1} = +1, a_{o,2} = -1, a_{o,3} = -1, a_{o,4} = +1$, οι οποίες επαληθεύουν την σχέση

$\sum_{i=1}^4 a_i d_i = 0$. Όλοι οι πολλαπλασιαστές Lagrange βγήκαν θετικοί, άρα και τα

τέσσερα διανύσματα του συνόλου εκμάθησης είναι διανύσματα στήριξης.

Μπορεί τώρα να υπολογιστεί η βέλτιστη τιμή του διανύσματος των βαρών \mathbf{w}_o ,

από την σχέση (4.19):

$$\mathbf{w}_o = \sum_{i=1}^4 a_{o,i} d_i \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) = -\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_1) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_2) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_3) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_4)$$

απ'όπου με αντικατάσταση, προκύπτει:

$$\mathbf{w}_o = \left[- \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Άρα το βέλτιστο υπερεπίπεδο προκύπτει κατά τα γνωστά:

$$\mathbf{w}_o \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x}), A_3(\mathbf{x}), A_4(\mathbf{x})] = 0 \Leftrightarrow -A_1(\mathbf{x}) + A_2(\mathbf{x}) + A_3(\mathbf{x}) - A_4(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{4}(1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2) + \frac{1}{4}(1 - x_1 + x_2 - x_1 x_2) + \frac{1}{4}(1 + x_1 - x_2 - x_1 x_2) - \frac{1}{4}(1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x_1 x_2 = 0$$

Είναι προφανές ότι η έξοδος y θα είναι ίση με -1 , για $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4$ και $+1$ για

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

4.5 Εκπαίδευση του Δικτύου με την χρήση της μεθόδου των Ελάχιστων Τετραγώνων

Επειδή η μέθοδος των Πολλαπλασιαστών Lagrange με την χρήση δευτεροβάθμιας Βελτιστοποίησης είναι ένα εξαιρετικά πολύπλοκο πρόβλημα, αφού κάθε ένα διάνυσμα του συνόλου εκμάθησης εισάγει μια μεταβλητή στην συνάρτηση Lagrange, μια εναλλακτική μέθοδος βελτιστοποίησης είναι με χρήση της μεθόδου των Ελάχιστων Τετραγώνων. Στην περίπτωση αυτή, η πολυπλοκότητα του προβλήματος (και άρα και ο χρόνος που απαιτείται για την εκπαίδευση του δικτύου), είναι σημαντικά μικρότερη, αλλά δεν οδηγεί σε τόσο ακριβή αποτελέσματα.

4.5.1 Περιγραφή της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων

Η μέθοδος αυτή διαφέρει σε σχέση με τον αρχικό αλγόριθμο των SVM στο ότι ο προσδιορισμός του βέλτιστου υπερεπιπέδου ανάγεται στην επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων αντί της δευτεροβάθμιας βελτιστοποίησης. Είναι προφανές ότι το πρόβλημα είναι σημαντικά πιο απλό. Όπως έχει αναφερθεί, η συνάρτηση κόστους η οποία και ελαχιστοποιείται δίνεται από την σχέση (3.17):

$$\Phi(\mathbf{w}, \xi) = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^N \xi_i$$

με βάση τους περιορισμούς που περιγράφονται και $\{(\mathbf{x}_i, d_i)\}_{i=1}^N$ σύνολο εκμάθησης. Στην περίπτωση που θα περιγραφεί σε αυτήν την παράγραφο, το δίκτυο θα αναφέρεται ως LS-SVM δίκτυο (Least Squares – SVM). Η συνάρτηση κόστους τροποποιείται ως εξής:

$$\Phi(\mathbf{w}, \xi) = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \quad (4.20)$$

και οι περιορισμοί σύμφωνα με τους οποίους θα ελαχιστοποιηθεί είναι ισότητες:

$$y_i(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_i) + b) = 1 - \xi_i, i = 1, 2, \dots, N$$

Και με την χρήση και πάλι των Πολλαπλασιαστών Lagrange, η συνάρτηση κόστους μπορεί να αντικατασταθεί από την:

$$\Phi(\mathbf{w}, b, a, \xi) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^N \xi_i^2 - \sum_{i=1}^N a_i \{y_i(\mathbf{w}^T \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_i) + b) - 1 + \xi_i\} \quad (4.21)$$

Όπου $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T$ είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange οι οποίοι στην περίπτωση του LS αλγορίθμου μπορούν να είναι θετικοί ή αρνητικοί. Οι περιορισμοί στην περίπτωση αυτή προκύπτουν παραγωγίζοντας την (4.21) ως προς $\mathbf{w}, \xi_i, b, a_i$ και εξισώνοντας τις παραγώγους με το μηδέν. Έτσι προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N a_i y_i \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_i) \quad (4.22)$$

$$\sum_{i=1}^N a_i y_i = 0 \quad (4.23)$$

$$a_i = C \xi_i \quad (4.24)$$

Γράφοντας όλα τα παραπάνω με μορφή πινάκων, προκύπτει η σχέση:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

όπου οι πίνακες $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{y}, \mathbf{1}, \mathbf{a}$ προκύπτουν ως εξής:

$$\boldsymbol{\Omega}_{ij} = d_i d_j \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_i)^T \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_j) + \frac{\delta_{ij}}{C} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_N)^T \quad (4.27)$$

$$\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \quad (4.28)$$

και:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4.29)$$

4.5.2 Εκπαίδευση του LS-SVM δικτύου

Η εκπαίδευση του LS – SVM δικτύου μπορεί να γίνει με την επίλυση του γραμμικού συστήματος που περιγράφεται από την σχέση (4.25) και οι πολλαπλασιαστές Lagrange προκύπτουν από την σχέση:

$$\mathbf{a} = \mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{1} - \mathbf{Y}b) \quad (4.30)$$

όπου το bias b προκύπτει από την σχέση:

$$b = \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{Y}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{Y}} \quad (4.31)$$

τα βάρη του δικτύου προκύπτουν από την σχέση (3.31):

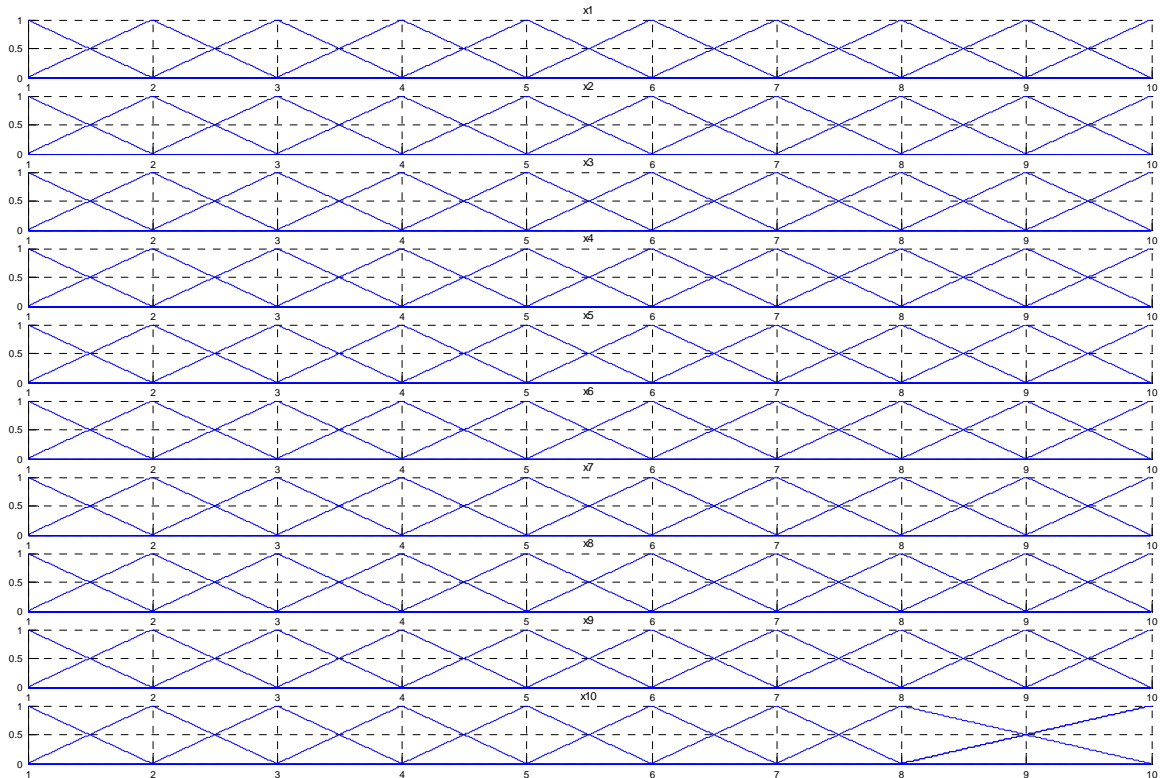
$$\mathbf{w}_o = \sum_{i=1}^n a_{o,i} d_i \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_i)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ FUZZY SVM ΔΙΚΤΥΩΝ

5.1 Μελέτη του Fuzzy SVM δικτύου

Με την χρήση της MATLAB κατασκευάστηκε ένα Fuzzy SVM δίκτυο, το οποίο και χρησιμοποιήθηκε για την δοκιμή των αλγορίθμων που περιγράφηκαν, με πραγματικά δεδομένα. Για την εκπαίδευση του δικτύου, καθώς και για τον έλεγχο, χρησιμοποιήθηκε το σύνολο δεδομένων καρκίνου του μαστού του Πανεπιστημίου του Winsconsin. Το σύνολο αυτό αποτελείται από 699 δείγματα. Ανάμεσα σε αυτά υπάρχουν κάποια τα οποία έχουν μια απροσδιόριστη παράμετρο. Αφαιρώντας τα, παραμένουν 683, από τα οποία τα 500 χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση του δικτύου και τα υπόλοιπα 183 για τον έλεγχο του.

Χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος βελτιστοποίησης με την χρήση Ελάχιστων Τετραγώνων λόγω της μικρότερης υπολογιστικής πολυπλοκότητας σε σχέση με την δευτεροβάθμια βελτιστοποίηση. Λόγω του πυρήνα που επιλέχθηκε για τον μη γραμμικό μετασχηματισμό από τον χώρο εισόδου στον χώρο χαρακτηριστικών, η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να μειώσει τον αριθμό των διανυσμάτων που θα χαρακτηριστούν ως διανύσματα στήριξης, κάτι που έχει ως συνέπεια ο αριθμός τους (και άρα και η διάσταση του χώρου χαρακτηριστικών), να είναι ίσος με τον αριθμό των διανυσμάτων του συνόλου εκπαίδευσης. Αυτό, βέβαια, δεν είναι επιθυμητό, αλλά τα αποτελέσματα του ελέγχου του δικτύου είναι αξιόλογα και φαίνονται στον πίνακα 5.1, ενώ η ομαδοποίηση του χώρου φαίνεται στο σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1: Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου από το Fuzzy SVM δίκτυο

Πίνακας 5.1: Αποτελέσματα Εξομοίωσης του Fuzzy SVM δικτύου

Παράμετροι LS:	C=0.5	A=-	κατώφλι: -
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 500		bias: $\rightarrow 0$
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 500/500 – 100%		Σετ Ελέγχου: 164/183 – 89.6%

Τα αποτελέσματα του πίνακα 5.1 δείχνουν ότι το δίκτυο μαθαίνει ακριβώς το σύνολο εκμάθησης. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού κάθε διάνυσμά του δημιουργεί έναν ασαφή κανόνα. Και αφού όλα τα διανύσματα του συνόλου εκμάθησης χαρακτηρίζονται ως διανύσματα στήριξης, είναι προφανές ότι θα ταξινομούνται όλα σωστά από το δίκτυο.

5.2 Μελέτη του Fuzzy SVM δικτύου με μη-συνεπείς Συναρτήσεις Συμμετοχής

Λόγω του προαναφερθέντος προβλήματος, η μελέτη του Fuzzy SVM δικτύου συνεχίζεται με ομαδοποίηση του χώρου από μη-συνεπείς τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν την μορφή:

$$A(x) = \Delta(x; b - A, b, b + A) \quad (5.1)$$

έχουν, δηλαδή σταθερό πλάτος και δεν εξασφαλίζουν απαραίτητα συνέπεια και πληρότητα. Αυτό, βέβαια, εξαρτάται και από το δοσμένο σύνολο εκμάθησης, αλλά είναι προφανές ότι στην γενική περίπτωση θα προκύψουν μη συνεπείς και μη πλήρεις συναρτήσεις συμμετοχής. Το θεώρημα του Mercer ικανοποιείται και σε αυτήν την περίπτωση αφού ο πυρήνας συνεχίζει να γράφεται με την μορφή εσωτερικού γινομένου, η οποία φαίνεται στην σχέση (5.2).

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m \Delta(x_i^j; b - A, b, b + A) \cdot \Delta(x_i^j; b - A, b, b + A) \quad (5.2)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να περιγραφεί ένα είδος συνέπειας που ονομάζεται αδύναμη συνέπεια (weak consistency). Η περιγραφή αυτή θα χρειαστεί στην κατανόηση των πειραματικών αποτελεσμάτων:

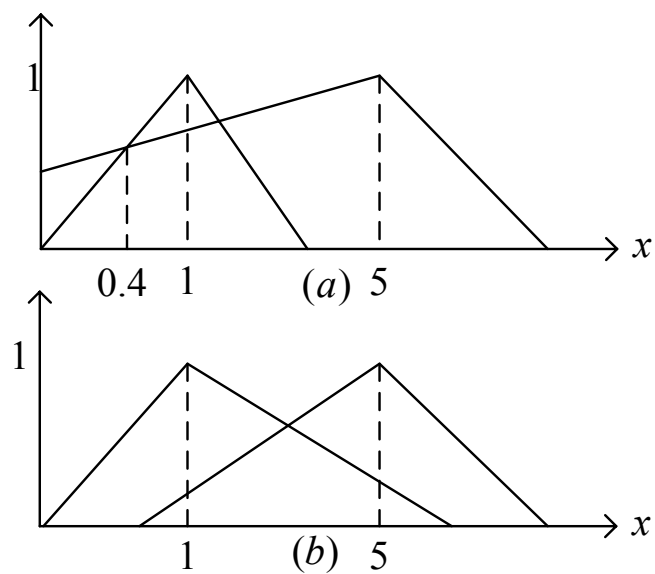
Ορισμός (Αδύναμη Συνέπεια): Έστω ότι τα ασαφή σύνολα $A_i (i=1,2,\dots,N)$ στο $U \subset \mathbb{R}$ με $A_1 < A_2 < \dots < A_N$. Τότε, τα $A_i (i=1,2,\dots,N)$ είναι αδύναμα συνεπή αν για $i, i+1 \in I'$, 1) $A_{i+1}(x) > A_i(x)$, για $x \geq M(A_{i+1})$ και $x \in S_{A_{i+1}}$, 2) $A_i(x) > A_{i+1}(x)$, για $x \leq M(A_i)$ και $x \in S_{A_i}$.

Το σύνολο $M(A)$ ορίζεται από την σχέση (5.3).

$$M(A) = \{x \in U \mid A(x) = \sup_{\hat{x} \in U} A(\hat{x})\} \quad (5.3)$$

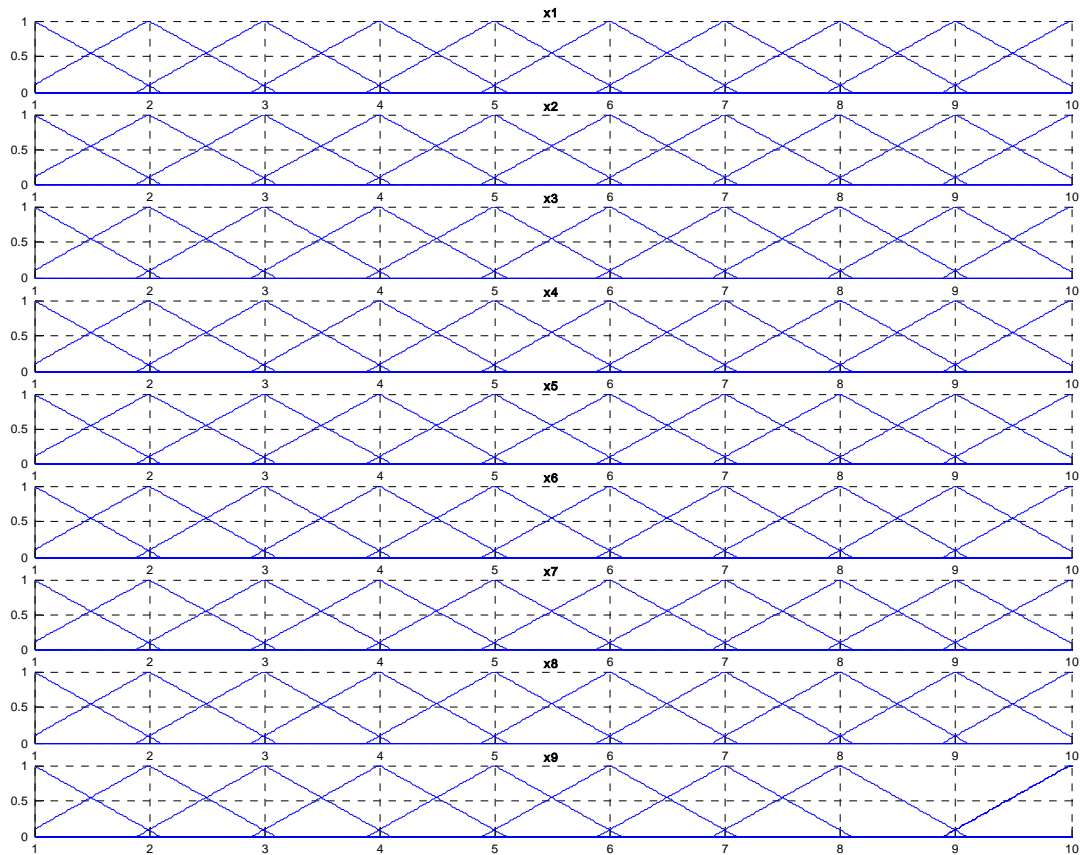
Έτσι, στην περίπτωση που η $A(x)$ είναι μια ψευδοτραπεζοειδής συνάρτηση $A(x) = T(x; a, b, c, d)$, για το $M(A)$ θα ισχύει η σχέση: $M(A) = [b, c]$.

Όσον αφορά το σύνολο S_A , αυτό είναι το σύνολο στήριξης του ασαφούς συνόλου A_i . Η αδύναμη συνέπεια μπορεί να γίνει κατανοητή με την βοήθεια του σχήματος 5.2.



Σχήμα 5.2: Παραδείγματα αδύναμης συνέπειας: (α) οι $A_1(x)$ και $A_2(x)$ δεν είναι αδύναμα συνεπείς. (β) οι $A_1(x)$ και $A_2(x)$ είναι αδύναμα συνεπείς.

5.2.1 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.1$

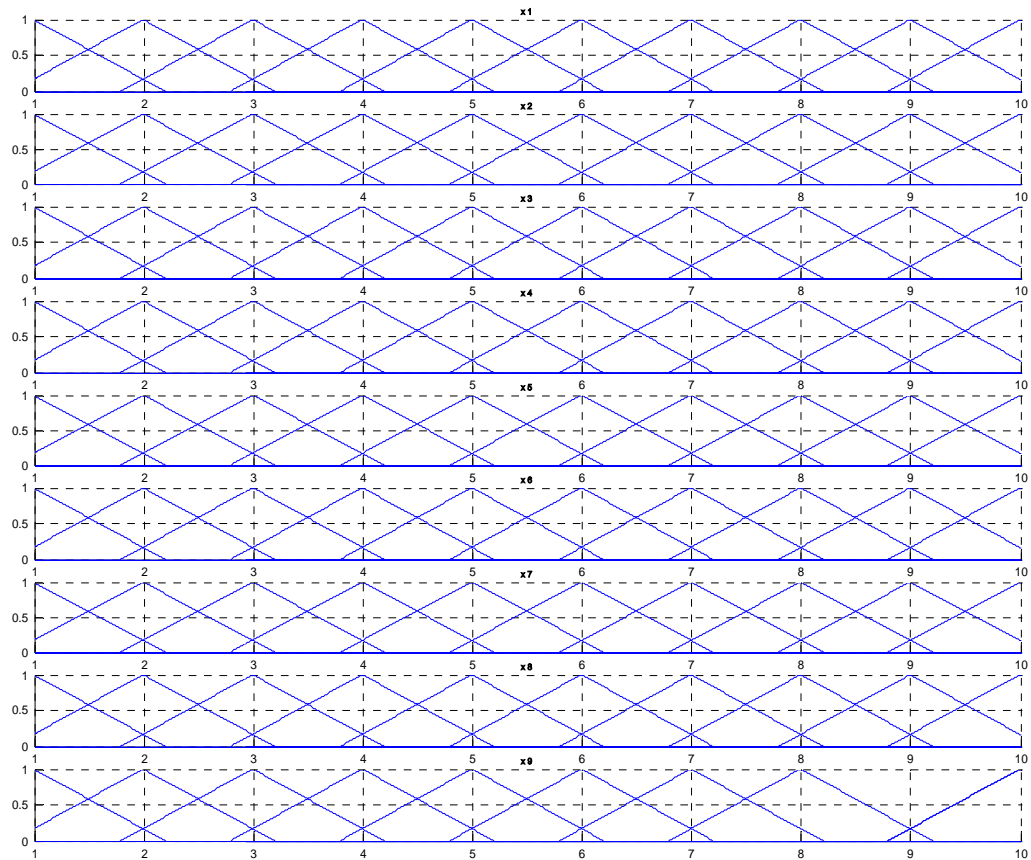


Σχήμα 5.3: Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.1$

Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.1$

Παράμετροι LS:	$C=0.5$	$A=1.1$	κατώφλι: $ 0,0006 $
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 322		bias: $0.0004 \rightarrow 0$
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 494/500 – 98.8%		Σετ Ελέγχου: 134/183 – 73,2%

5.2.2 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.2$

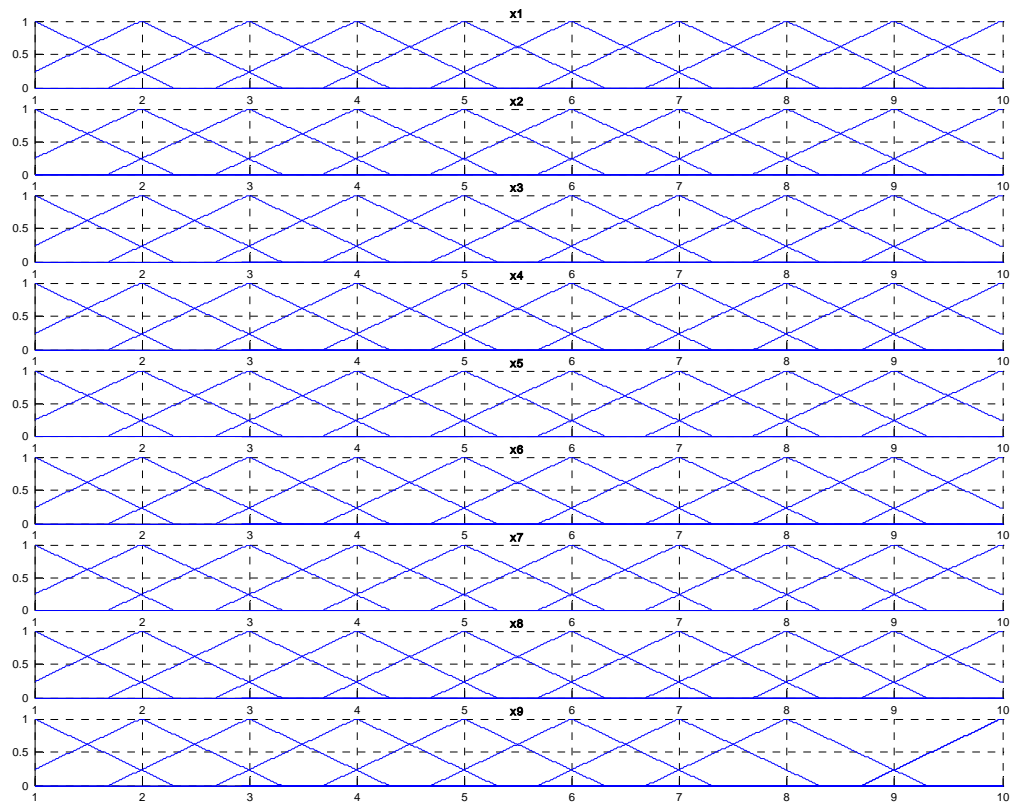


Σχήμα 5.4 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.2$

Πίνακας 5.3: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.2$

Παράμετροι LS:	$C=0.5$	$A=1.2$	κατώφλι: $ 0,0006 $
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 318		bias: $0.0005 \rightarrow 0$
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 494/500 – 98.8%		Σετ Ελέγχου: 134/183 – 73,2%

5.2.3 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.3$

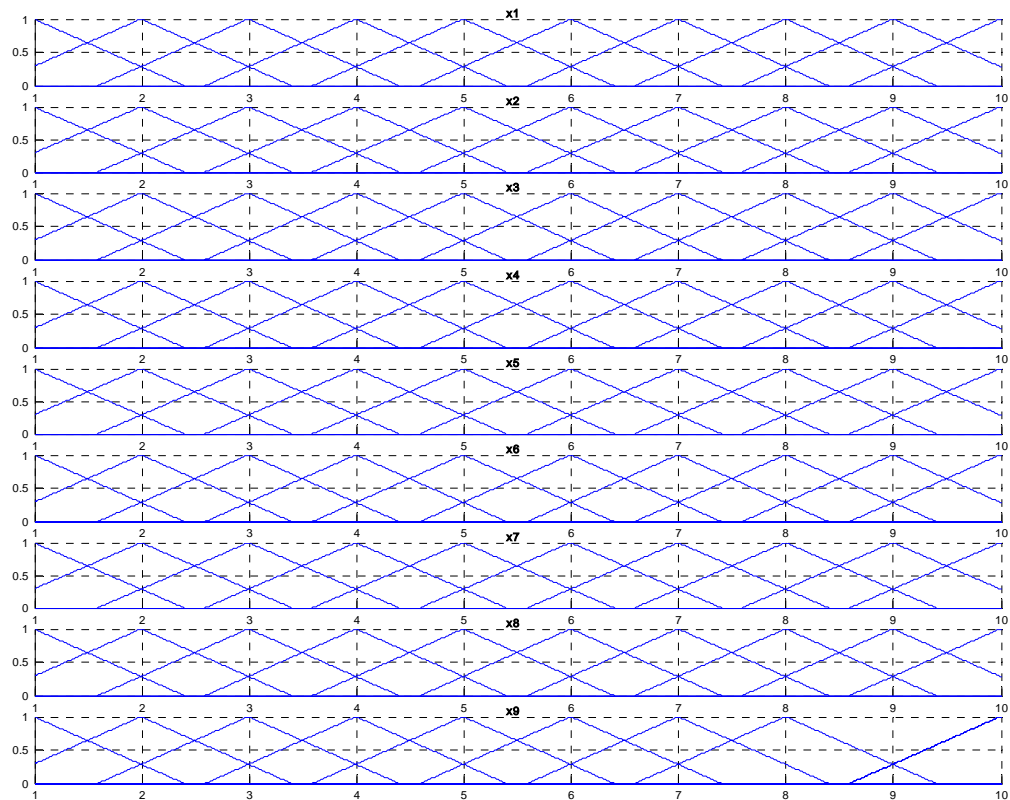


Σχήμα 5.5 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.3$

Πίνακας 5.4: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.3$

Παράμετροι LS:	C=0.5	A=1.3	κατώφλι: 0,0006
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 314		bias: 0.00061
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 472/500 – 94.4%		Σετ Ελέγχου: 137/183 – 74,8%

5.2.4 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.4$

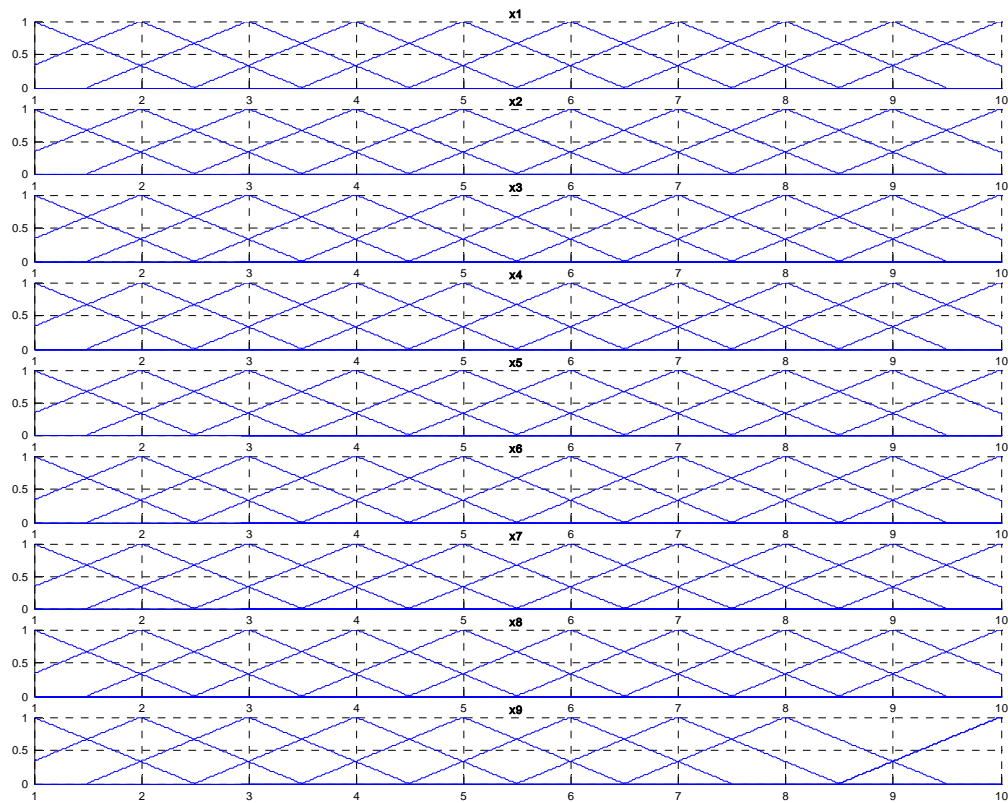


Σχήμα 5.6 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.4$

Πίνακας 5.5: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.4$

Παράμετροι LS:	$C=0.5$	$A=1.4$	κατώφλι: $ 0,0006 $
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 320		bias: 0.00071
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 480/500 – 96.0%		Σετ Ελέγχου: 146/183 – 79,8%

5.2.5 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.5$

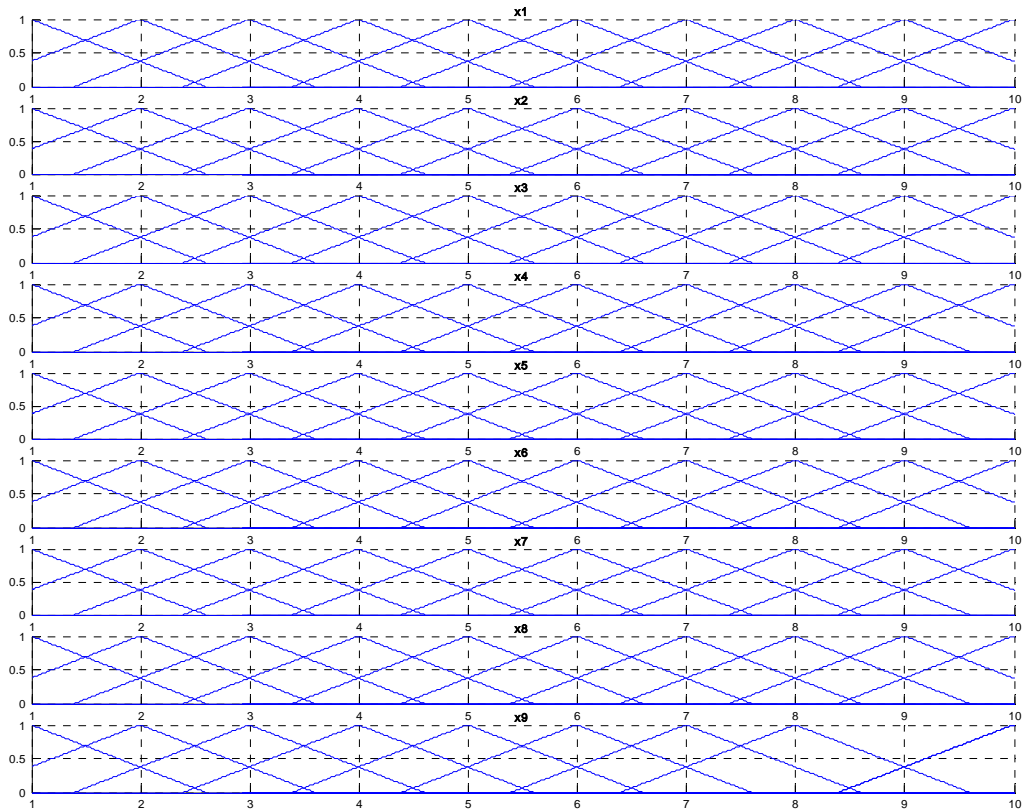


Σχήμα 5.7 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.5$

Πίνακας 5.6: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.5$

Παράμετροι LS:	$C=0.5$	$A=1.5$	κατώφλι: $ 0,0006 $
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 320		bias: 0.00078
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 489/500 – 97.8%		Σετ Ελέγχου: 155/183 – 84.7%

5.2.6 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.6$

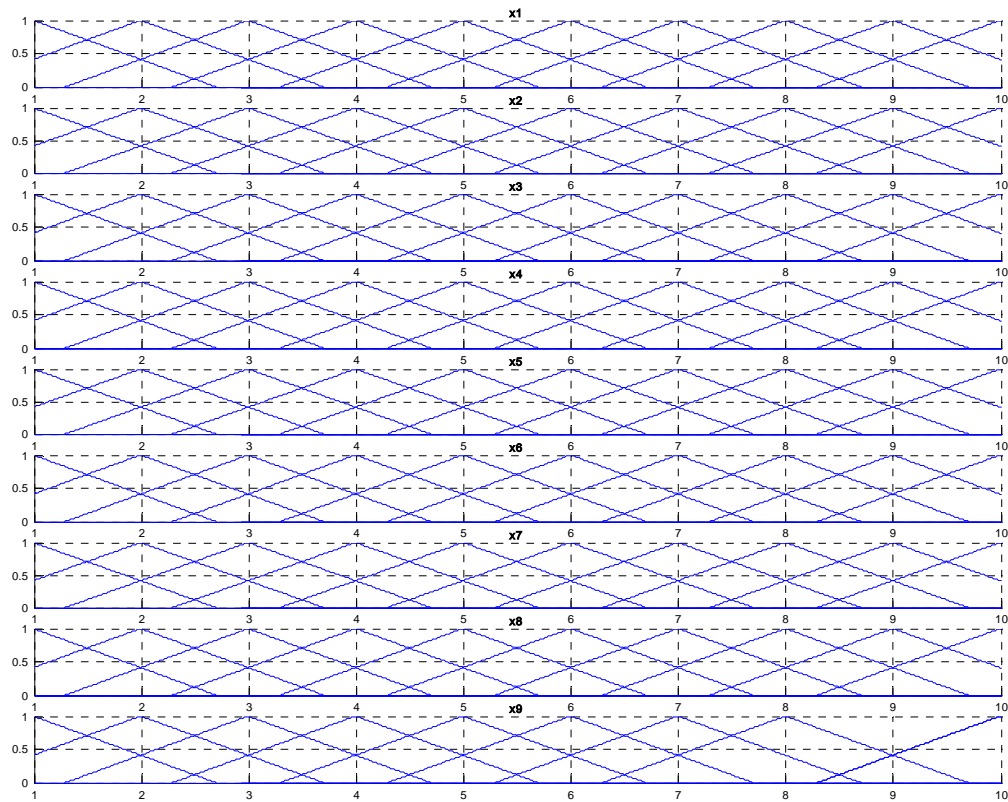


Σχήμα 5.8 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.6$

Πίνακας 5.7: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.6$

Παράμετροι LS:	C=0.5	A=1.6	κατώφλι: 0,0006
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 314		bias: 0.00085
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 460/500 – 92.0%		Σετ Ελέγχου: 132/183 – 72.1%

5.2.7 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.7$

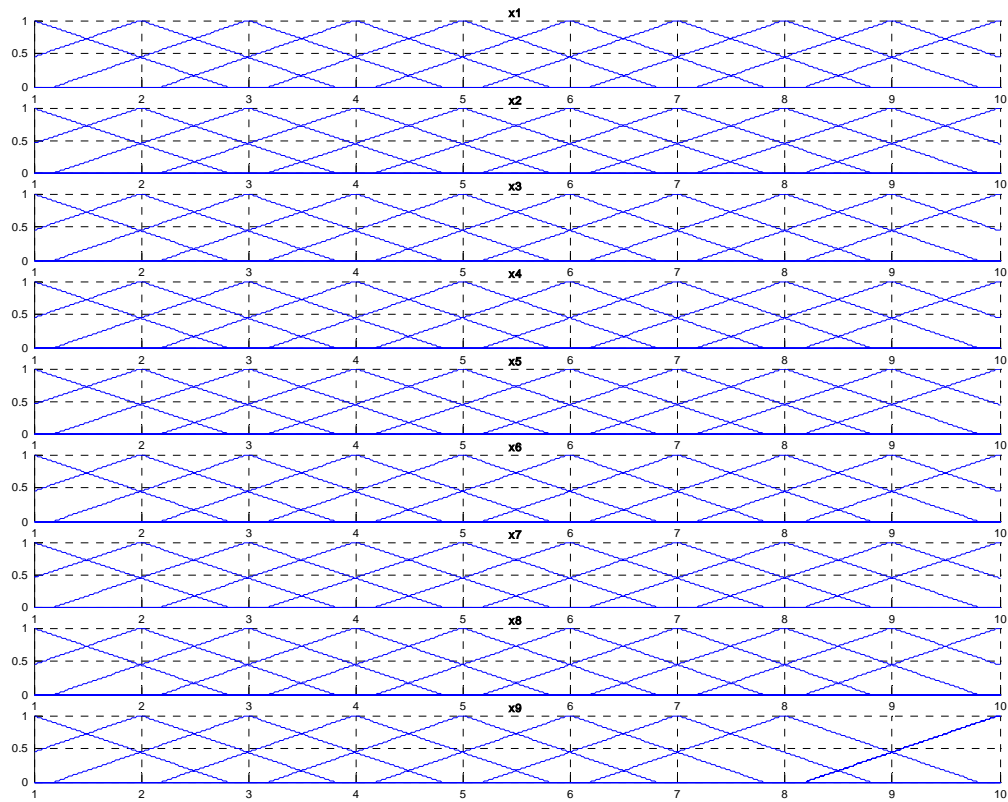


Σχήμα 5.9 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.7$

Πίνακας 5.8: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.7$

Παράμετροι LS:	$C=0.5$	$A=1.7$	κατώφλι: $ 0,0006 $
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 318		bias: 0.00091
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 470/500 – 94.0%		Σετ Ελέγχου: 146/183 – 79.8%

5.2.8 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.8$

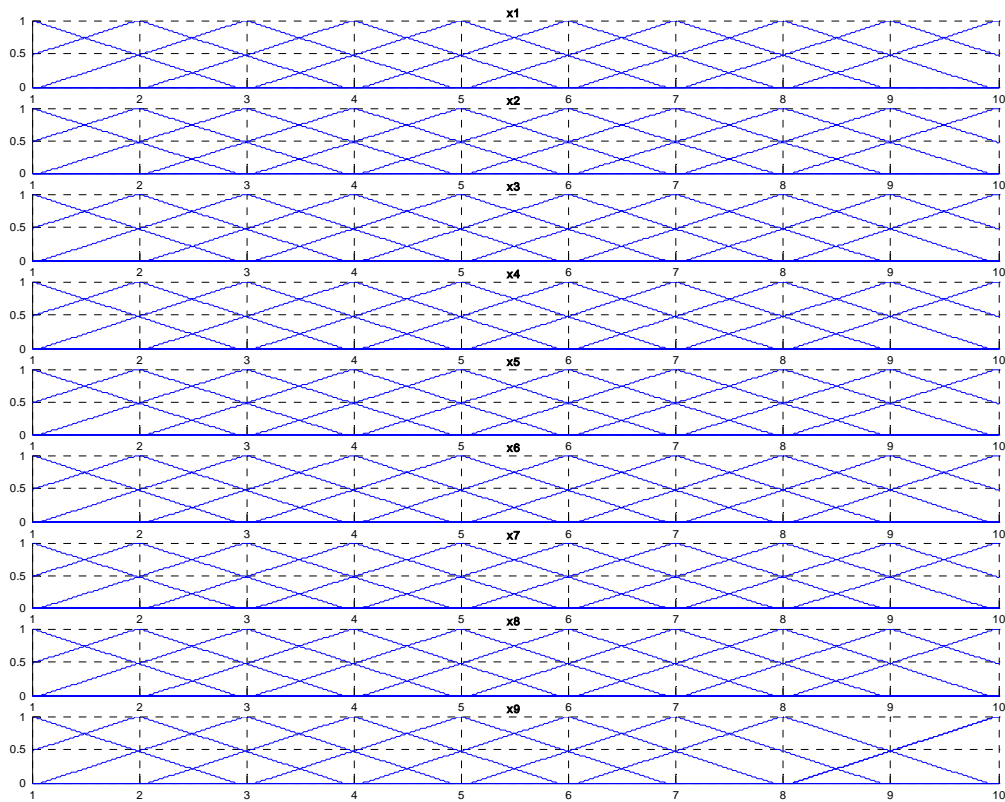


Σχήμα 5.10 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.8$

Πίνακας 5.9: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.8$

Παράμετροι LS:	$C=0.5$	$A=1.8$	κατώφλι: $ 0,0006 $
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 318		bias: 0.00095
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 473/500 – 94.6%		Σετ Ελέγχου: 146/183 – 80.3%

5.2.9 Μελέτη του Δικτύου με $A=1.9$

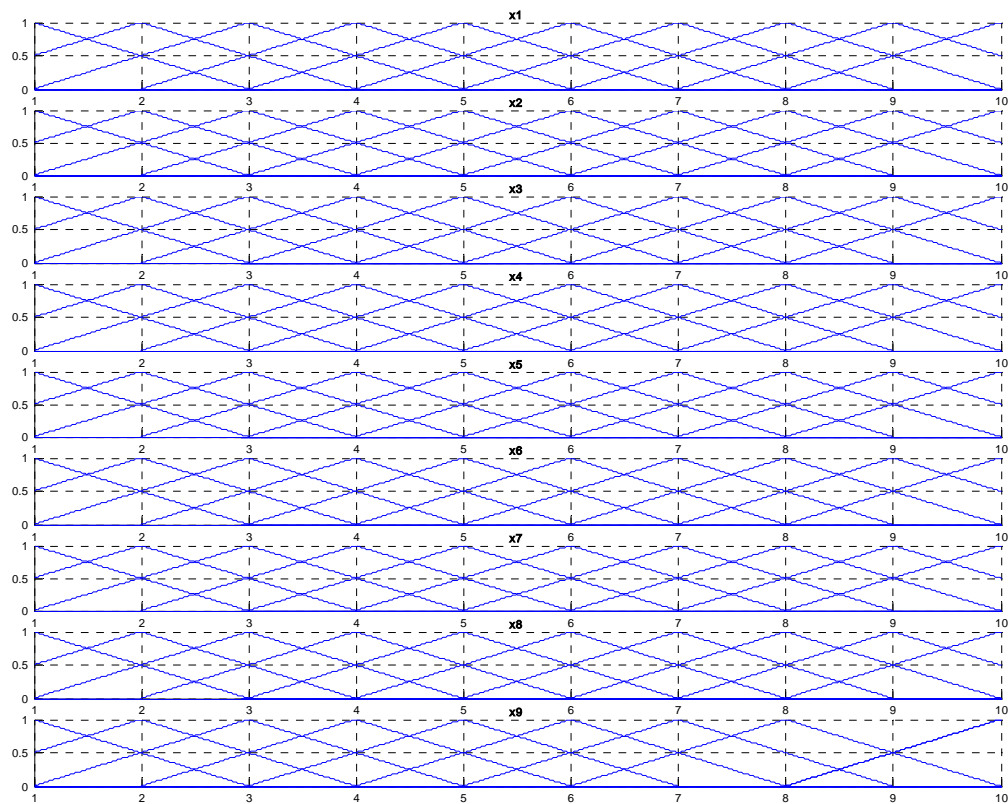


Σχήμα 5.11 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=1.9$

Πίνακας 5.10: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.9$

Παράμετροι LS:	$C=0.5$	$A=1.9$	κατώφλι: $ 0,0006 $
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 342		bias: 0.00098
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 476/500 – 95.2%		Σετ Ελέγχου: 151/183 – 82.5%

5.2.10 Μελέτη του Δικτύου με $A=2.0$

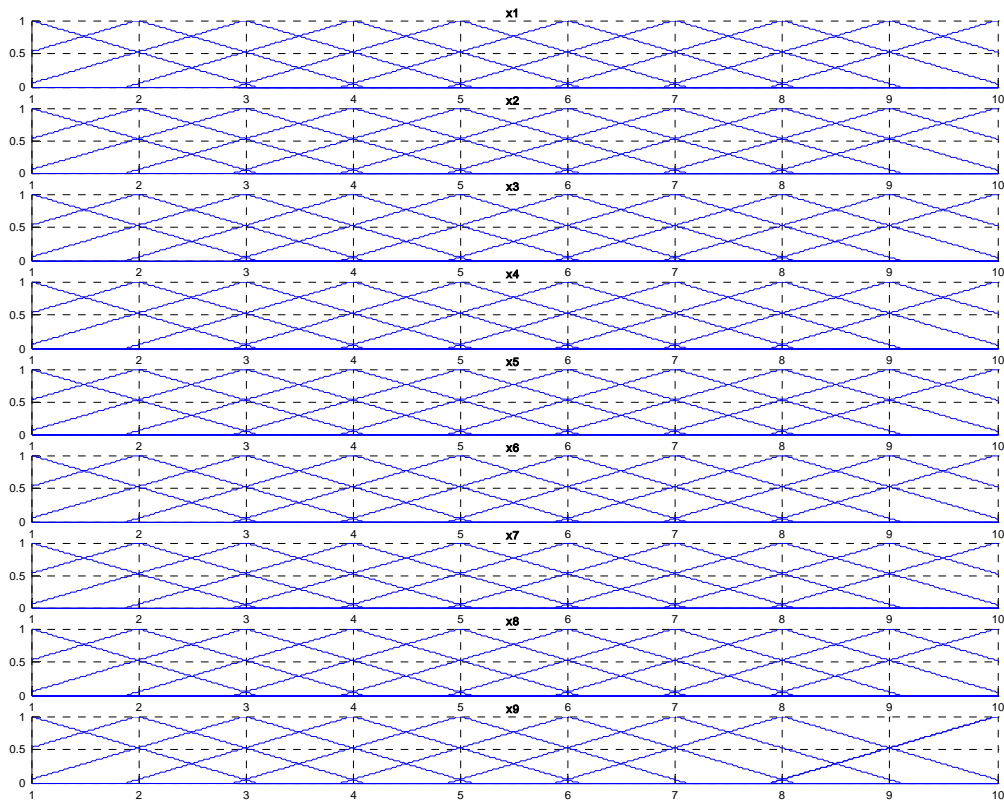


Σχήμα 5.12 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=2.0$

Πίνακας 5.11: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=2.0$

Παράμετροι LS:	$C=0.5$	$A=2.0$	κατώφλι: $ 0,0006 $
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 360		bias: 0.001
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 398/500 – 79.6%		Σετ Ελέγχου: 110/183 – 60.1%

5.2.11 Μελέτη του Δικτύου με $A=2.1$

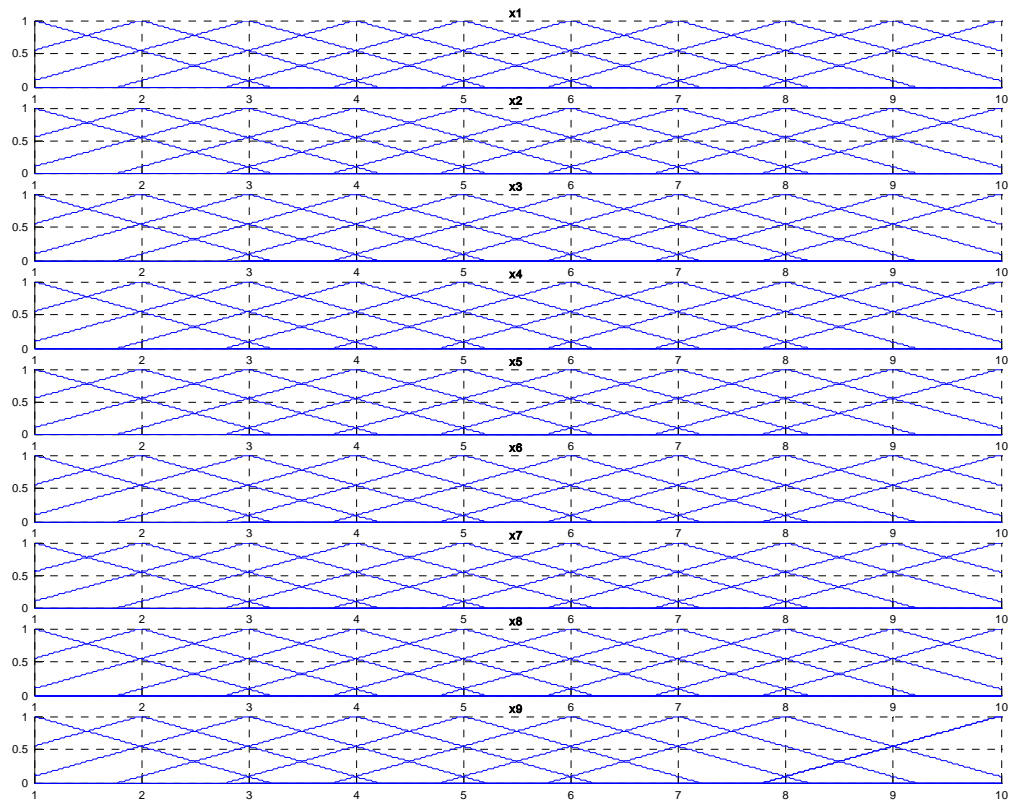


Σχήμα 5.13 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=2.1$

Πίνακας 5.12: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=2.1$

Παράμετροι LS:	$C=0.5$	$A=2.1$	κατώφλι: $ 0,0006 $
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 359		bias: 0.0012
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 330/500 – 66.0%		Σετ Ελέγχου: 76/183 – 41.5%

5.2.12 Μελέτη του Δικτύου με $A=2.2$

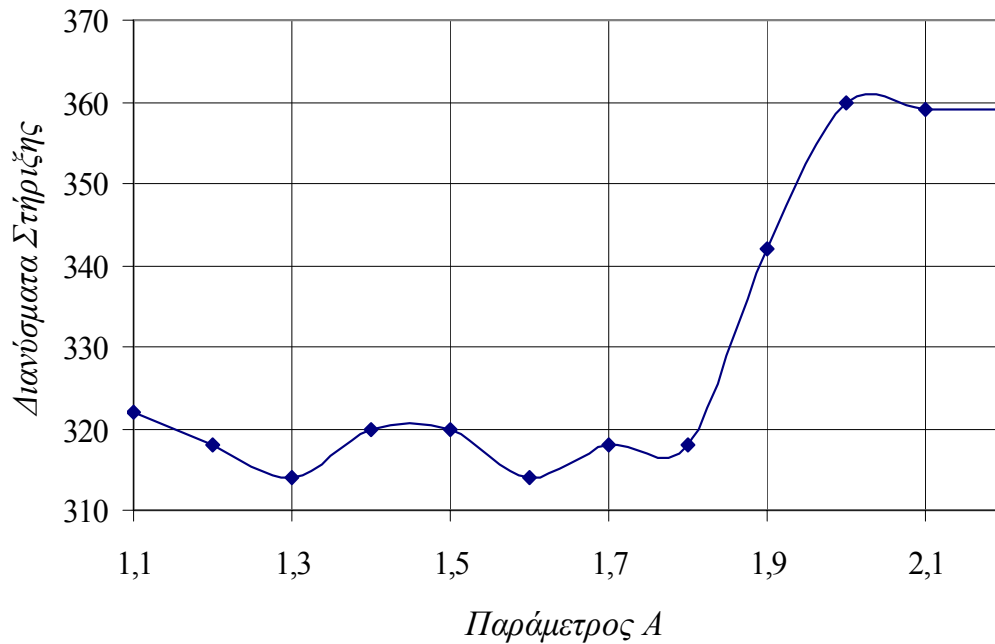


Σχήμα 5.14 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=2.2$

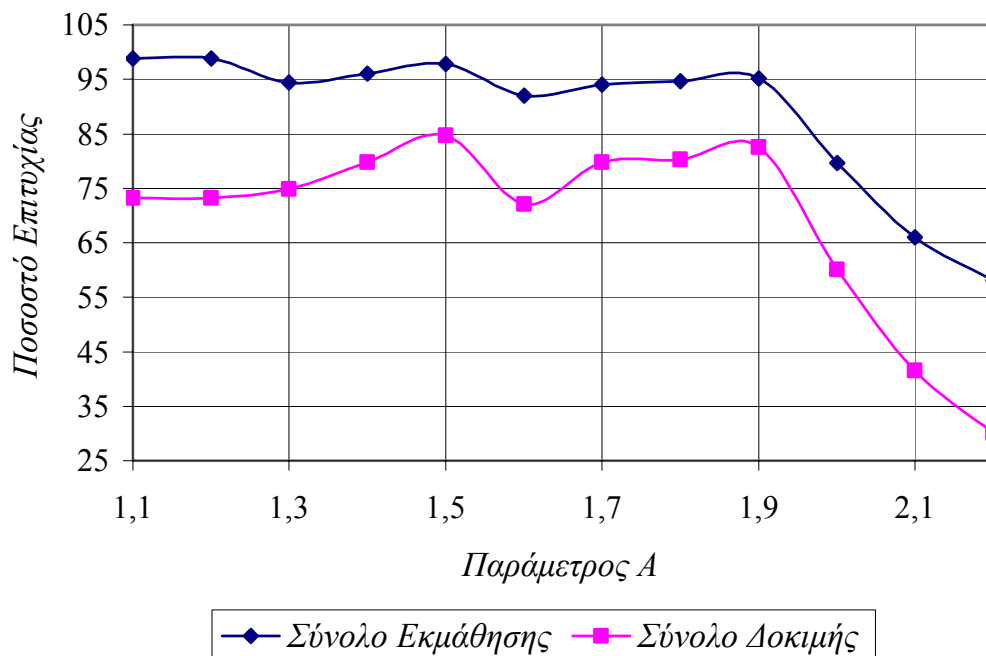
Πίνακας 5.13: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=2.2$

Παράμετροι LS:	$C=0.5$	$A=2.2$	κατώφλι: $ 0,0006 $
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 359		bias: 0.0013
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 293/500 – 58.0%		Σετ Ελέγχου: 55/183 – 30.1%

5.2.13 Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα



Σχήμα 5.15 Μεταβολή του αριθμού των διανυσμάτων στήριξης σε συνάρτηση με την παράμετρο A.



Σχήμα 5.16 Μεταβολή των ποσοστών επιτυχίας συνόλου εκμάθησης και συνόλου δοκιμής σε συνάρτηση με την παράμετρο A.

5.2.14 Σχολιασμός των αποτελεσμάτων

Καταρχάς, είναι αναγκαίο να αποσαφηνιστεί ο τρόπος με τον οποίο έγινε η εξομοίωση και προέκυψαν τα αποτελέσματα που προέκυψαν στις προηγούμενες παραγράφους. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων που χρησιμοποιήθηκε μειώνει τον αριθμό των διανυσμάτων στήριξης σε αριθμό όχι πολύ μικρότερο από τον αριθμό των διανυσμάτων του συνόλου εκμάθησης. Αυτό δεν είναι επιθυμητό γιατί δεν επιτυγχάνεται σημαντική μείωση της διάστασης του χώρου χαρακτηριστικών και αυτό προκαλεί την ανάγκη για εισαγωγή του κατωφλίου για την επιλογή των διανυσμάτων στήριξης. Στην περίπτωση που εξετάζεται, η επιλογή αυτή έχει νόημα αφού η έξοδος του δικτύου εξαρτάται από τα βάρη που δίνονται από την σχέση (4.19) όπου είναι προφανής η εξάρτηση τους από τους πολλαπλασιαστές Lagrange. Άρα είναι εφικτό να αφαιρεθούν κάποιοι κόμβοι από το κρυφό επίπεδο, αρκεί το αντίστοιχο βάρος να είναι πολύ μικρό σε σχέση με τα υπόλοιπα. Θα ήταν σωστότερο, ίσως, να επιλέγεται κάθε φορά το κατώφλι σε σχέση ή με την μέση τιμή των πολλαπλασιαστών ή σε σχέση με την μέγιστη τιμή τους. Ωστόσο προκειμένου να απλουστευθεί λίγο ο αλγόριθμος, επιλέχθηκε πειραματικά η τιμή $|0,0006|$, η οποία έδωσε αρκετά καλό αριθμό διανυσμάτων στήριξης αλλά και ικανοποιητικά αποτελέσματα για τις περισσότερες τιμές της παραμέτρου A .

Η παράμετρος A επιλέχθηκε να είναι ίση με το πλάτος, προκειμένου να διευκολυνθεί ο αναγνώστης και να είναι εφικτή η κατανόηση του γιατί το σύστημα οδηγείται σε πληρότητα και σε κάποιες περιπτώσεις και σε αδύναμη συνέπεια. Μια πιο καλή προσέγγιση για τον τρόπο ορισμού της θα μπορούσε να είναι η ακόλουθη: το A να είναι ένας αριθμός στο διάστημα από 0 έως 1, και το σύνολο να είναι κανονικοποιημένο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, είναι φανερό ότι το Fuzzy SVM δίκτυο λειτουργεί καλά στην περίπτωση που υπάρχει αδύναμη συνέπεια. Επίσης, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης οδηγεί σε πλήρεις ομαδοποιήσεις του

χώρου, κάτι που δεν είναι σίγουρο ότι θα συμβαίνει πάντα, αλλά εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, και πιο συγκεκριμένα από την παράμετρο A , το κατώφλι για τους πολλαπλασιαστές Lagrange (το οποίο οδηγεί σε μεγάλο ή μικρό αριθμό διανυσμάτων στήριξης) και φυσικά το σύνολο εκμάθησης. Όταν παραβιάζεται η αδύναμη συνέπεια, η επίδοση του δικτύου, τόσο στο σύνολο εκμάθησης, όσο και στο σύνολο εκπαίδευσης, πέφτει δραματικά και ταυτόχρονα αυξάνεται και ο αριθμός των διανυσμάτων στήριξης, δηλαδή το δίκτυο γίνεται ακόμη πιο πολύπλοκο.

Τέλος, σκόπιμο κρίνεται να περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίο λειτουργούν οι κανόνες προκειμένου να γίνει κατανοητός ο τρόπος λειτουργίας του δικτύου. Θεωρούμε το διάνυσμα στήριξης $x = [5, 10, 10, 3, 7, 3, 8, 10, 2]$ που έχει απόκριση d ίση με 1. Ο ασαφής κανόνας που προκύπτει είναι:

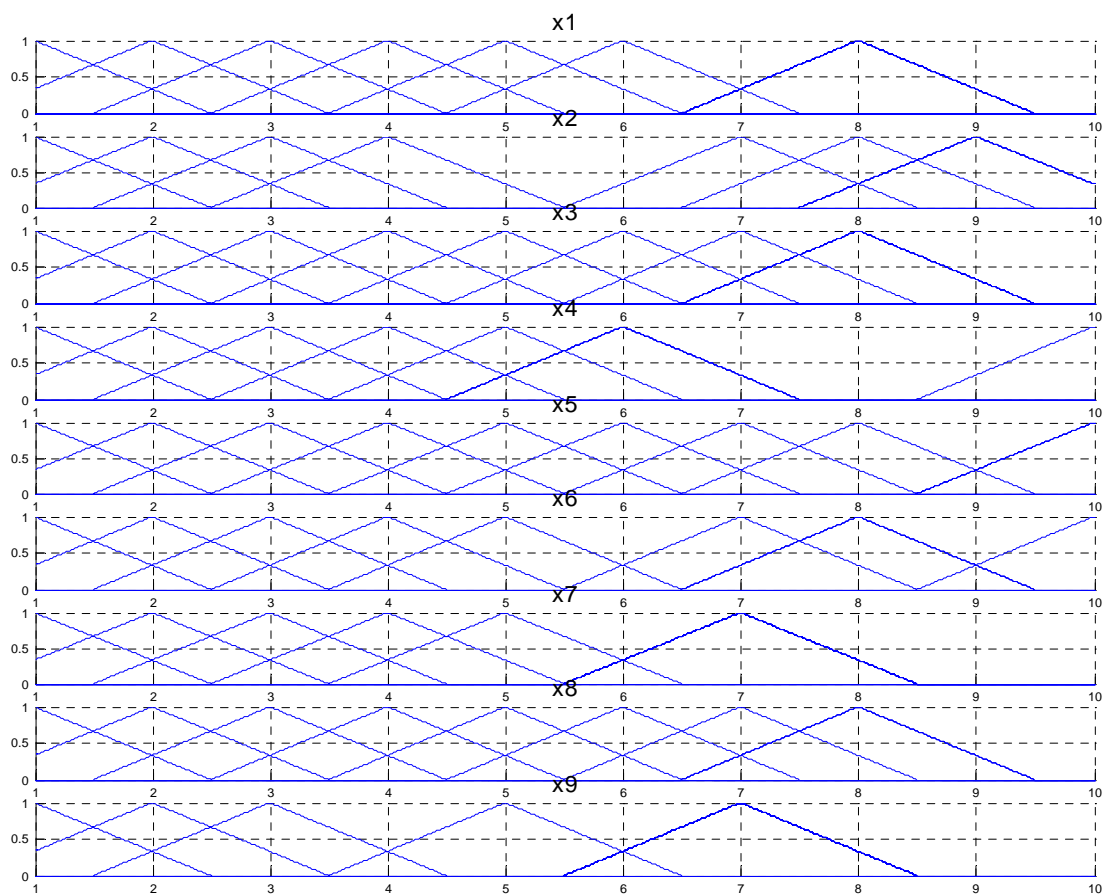
«ΑΝ x_1 είναι περίπου 5 ΚΑΙ x_2 είναι περίπου 10 ΚΑΙ x_3 είναι περίπου 10 ΚΑΙ x_4 είναι περίπου 3 ΚΑΙ x_5 είναι περίπου 7 ΚΑΙ x_6 είναι περίπου 3 ΚΑΙ x_7 είναι περίπου 8 ΚΑΙ x_8 είναι περίπου 10 ΚΑΙ x_9 είναι περίπου 2, ΤΟΤΕ y είναι περίπου 1»

5.2.15 Μια δοκιμή του Fuzzy SVM δικτύου με μεγάλο κατώφλι για την επιλογή των διανυσμάτων στήριξης

Όπως έχει αναφερθεί, ένα Fuzzy SVM δίκτυο μπορεί να εκπαιδευθεί με ένα σύνολο κανόνων. Επειδή οι κανόνες αυτοί είναι συνήθως εμπειρικοί, είναι πολύ λιγότεροι από αυτούς που προκύπτουν από την εκπαίδευση του δικτύου όπως έχει παρουσιαστεί σε αυτή τη μελέτη. Κρίνεται, λοιπόν, σκόπιμο να διερευνηθεί κατά πόσον ένα Fuzzy SVM δίκτυο αποδίδει με πολύ λιγότερους κανόνες από αυτούς που επιλέχθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Αυτό γίνεται με τον ίδιο αλγόριθμο, αλλά επιλογή μεγαλύτερου κατωφλίου για την επιλογή των διανυσμάτων στήριξης.

Το κατώφλι που επιλέχθηκε ήταν $|0.002|$ και η τιμή της παραμέτρου A ήταν ίση με 1.5, αυτή δηλαδή που έδωσε τα καλύτερα αποτελέσματα στην προηγούμενη μελέτη. Τα αποτελέσματα για την περίπτωση αυτή φαίνονται στον πίνακα 5.14 και η ομαδοποίηση του χώρου στο σχήμα 5.17. Το γεγονός ότι το δίκτυο έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα με τόσο λίγα διανύσματα στήριξης και άρα πολύ λίγους κανόνες ήταν τυχαίο λόγω του συγκεκριμένου συνόλου δεδομένων. Αποτελεί, όμως, ένδειξη ότι ακόμη και με πολύ λίγους κανόνες και κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου A , ένα Fuzzy SVM δίκτυο μπορεί να λειτουργήσει ικανοποιητικά.

Κάτι άλλο που πρέπει να παρατηρηθεί είναι ότι δεν εξασφαλίστηκε στην περίπτωση αυτή η πληρότητα του ασαφούς συστήματος, κάτι που θα μπορούσε να δώσει, ενδεχομένως, καλύτερα αποτελέσματα.



Σχήμα 5.17 Ασαφής Διαμέριση του χώρου εισόδου με $A=2.2$

Πίνακας 5.14: Αποτελέσματα Εξομοίωσης για $A=1.5$ και μεγάλο κατώφλι

Παράμετροι LS:	C=0.5	A=1.5	κατώφλι: 0,002
Δομή Δικτύου:	Διανύσματα Στήριξης: 81		bias: 0.0007 \rightarrow 0
Αποτελέσματα:	Σετ Εκμάθησης: 296/500 – 59.2%		Σετ Ελέγχου: 132/183 – 72.1%

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Xiao-Jun Zeng and Madan G. Singh, “Approximation Accuracy Analysis of Fuzzy Systems as Function Approximators”, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.4, No. 1, February 1996

Xiao-Jun Zeng and Madan G. Singh, “Approximation Theory of Fuzzy Systems – SISO Case”, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.2, No. 2, May 1994

Xiao-Jun Zeng and Madan G. Singh, “Decomposition Property of Fuzzy Systems and its Applications”, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.4, No. 2, May 1996

Xiao-Jun Zeng and Madan G. Singh, “Approximation Properties of Fuzzy Systems Generated by the Min Inference”, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part B: Cybernetics, Vol.26, No. 1, February 1996

J.A.K. Suykens, J. De Brabanter, L. Lukas, J Vandewalle, “Weighted least squares support vector machines: robustness and sparse approximation”, Elsevier Neurocomputing 48 (2002) 85-105

Christopher J.C. Burges, “A Tutorial on Support Vector Machines for Pattern Recognition, Kluwer Academic Publishers, Boston

Simon Haykin , “Neural Networks – A Comprehensive Foundation, Second Edition”, Prentice Hall, 1999

George J. Klir/Bo Yuan, “Fuzzy Sets and Fuzzy Logic – Theory and Applications”, Prentice Hall, 1995